Contresempi inerenti i criteri di congruenza dei triangoli

Il **primo criterio** di **congruenza** dei triangoli afferma che: “Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti due lati e l’angolo <u>compreso tra i lati</u>”.

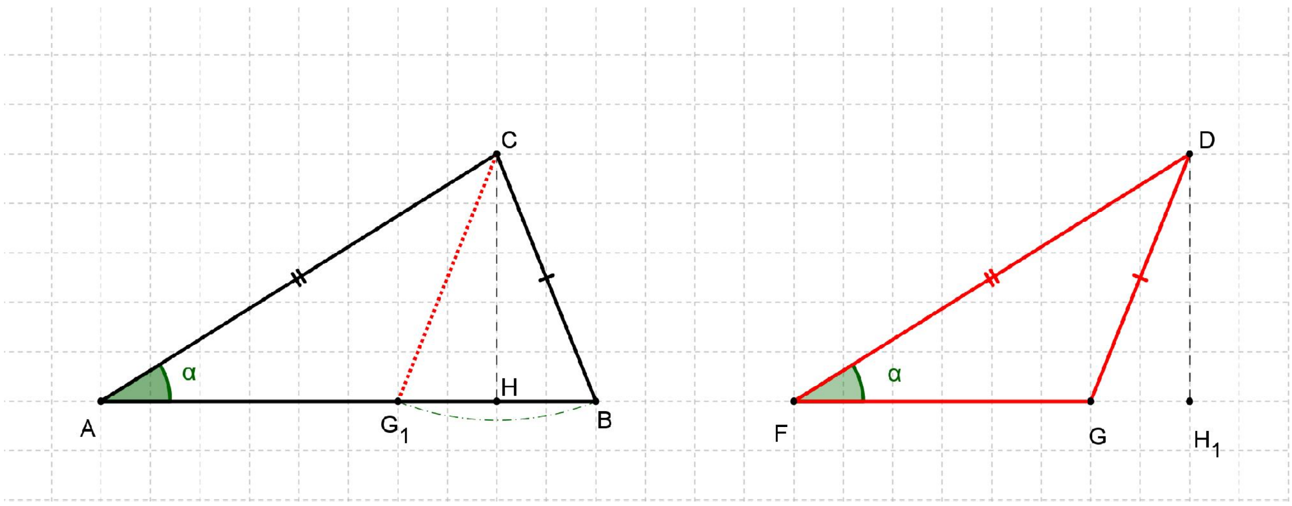
Ma è proprio **indispensabile** che quest’angolo sia compreso tra i lati?

Sì! Vediamo, infatti cosa *può*[1] succedere se due triangoli hanno congruenti due lati e un angolo **<u>non</u>** compreso tra questi lati. Nel caso mostrato in figura, i triangoli ABC e FGD hanno: AC $\cong FD$; CB $\cong DG$; $C\hat{A}B \cong D\hat{F}G$.

Ma $C\hat{A}B$ *e* $D\hat{F}G$ **<u>non</u>** sono gli angoli compresi tra AC e BC e tra FD e DG e i due triangoli - come è evidente confrontando i lati AB ed FG - **<u>non</u>** sono congruenti.

OSS1 Perché si verifichi la situazione rappresentata, dev’essere CB<AC. Più in generale, il lato opposto all’angolo dev’essere minore del lato adiacente [ovviamente mi sto riferendo ai lati e all’angolo che, fra i due triangoli, sono congruenti].

OSS2 Nel triangolo **ABC** ho evidenziato *una possibile* costruzione che porta a rappresentare il triangolo **FGD**: si punta il compasso in C, si apre fino a B e si traccia un arco che intersechi il lato AB: in questo modo si ha un lato CG_1, congruente a CB e – contando i quadretti o utilizzando gli strumenti che si ritengono più semplici o più precisi – si può costruire il triangolo **FGD**. Alternativamente si possono contare i quadretti o si possono sfruttare le molteplici caratteristiche dell’altezza di un triangolo isoscele (visto che sono condizioni necessarie e sufficienti): CH infatti è altezza del triangolo isoscele $\mathbf{G_1BC}$ e, come tale, è mediana della base $\mathbf{G_1B}$; ecc...



[1] Le **leggi matematiche** si riferiscono solo a caratteristiche che si verificano SEMPRE (quando sono rispettate le ipotesi di riferimento): non esiste *regola*, se c’è <u>anche solo un’</u>*eccezione* alla *regola*! Infatti, per mostrare che una certa proprietà NON vale, basta trovare UN **esempio** in cui tale proprietà non vale: un ***<u>contresempio</u>***.

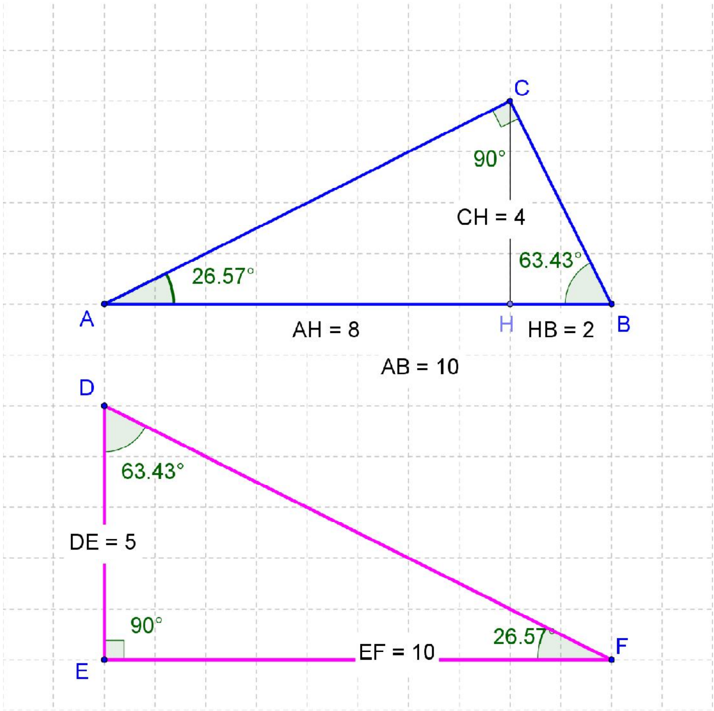
In questo file ci occuperemo di analizzare <u>contresempi relativi a criteri di congruenza dei triangoli incompleti</u>. In particolare, risponderemo alle seguenti domande: il primo criterio, può essere enunciato omettendo il fatto che gli angoli siano compresi tra i lati? E il secondo criterio può essere enunciato omettendo che gli angoli devono essere adiacenti al lato?

Il **secondo criterio** di **congruenza** dei triangoli afferma che: “Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un lato e gli angoli adiacenti al lato”.

Ma è proprio **indispensabile** che questi angoli siano adiacenti al lato?

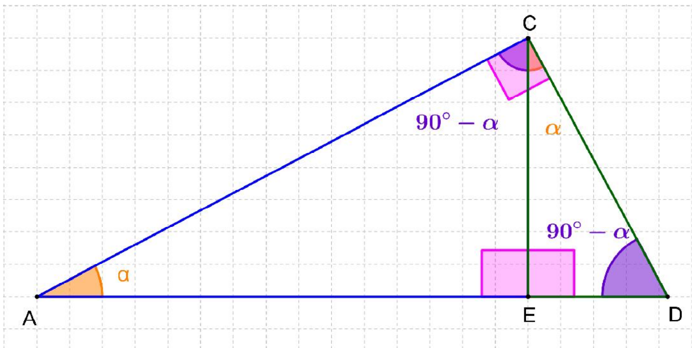
Sì! Vediamo, infatti cosa *può* succedere se due triangoli hanno congruenti un lato e angoli **non** adiacenti a questo lato. Nel caso mostrato in figura, i triangoli **ABC** e **DEF**, entrambi rettangoli[2], hanno:

AB $\cong EF$; $C\hat{A}B \cong D\hat{F}E$; $A\hat{B}C \cong F\hat{D}E$.



Ma gli angoli congruenti **non** sono quelli adiacenti al lato congruente e i due triangoli **non** sono congruenti - come è evidente ricordando che, in un triangolo rettangolo, l’ipotenusa è il lato maggiore e considerando che l’ipotenusa di **ABC** è congruente a un cateto di **EFD**.

OSS1 In figura sono date le misure delle ampiezze degli angoli e delle lunghezze dei lati, per *convincere* chi legge.



OSS2 Quel che conta è costruire **triangoli simili**[3] (ma non congruenti[4]), perché vogliamo che abbiano gli angoli congruenti. Come fare a costruire triangoli simili? Utilizzando la definizione, contando i quadretti e osservando quanto rappresentato in figura.

Infatti, dato un triangolo rettangolo **ACD** e tracciata l’altezza CE relativa all’ipotenusa AD, i tre triangoli **ACD** (*grosso*), **CEA** (*medio*), DEC (*piccolo*), sono **tutti simili** tra loro. Infatti, se α è la *misura dell’ampiezza dell’angolo* in **A**, e 90° è la *misura dell’ampiezza dell’angolo* in **C,** l’angolo in **D** misura **90°- α** (fai la prova: $A+B+C=180°$). Ma, con ragionamento analogo, anche ECA=90°- α e, quindi, ECD= α. E si può dimostrare come questa caratteristica sia una CNS per avere un triangolo rettangolo.

Stabilito ciò, osserva come il rapporto fra cateto minore e cateto maggiore del triangolo **EDF** della **fig.1** sia ½ . **ABC** è **simile** a **EDF** perché il rapporto tra i cateti dei triangoli **CHA** e **BHC** è sempre ½! Prova, riprova e riprova, per convincertene...

---

2 Ho scelto triangoli **rettangoli** per semplificarne il disegno. Questo particolare non indebolisce il controesempio perché, come già detto, un esempio qualunque va bene per dimostrare che una proposizione non è vera (in questo caso, la proposizione: “Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti ordinatamente un lato e due angoli”).

3 DEF Due figure si dicono **simili** se hanno i lati ordinatamente in proporzione. In particolare, solo per i triangoli [CONTRES: pensa ai rettangoli], vale il seguente **criterio di similitudine**: “Due triangoli sono simili se hanno gli angoli congruenti”.

4 La *relazione* di **congruenza** è un caso particolare della *relazione* di **similitudine**: il caso in cui il rapporto di proporzionalità è 1!