Le attività “speciali” della matematica: DEFINIRE e DIMOSTRARE

Cominciamo da una domanda cruciale: ***“La matematica insegna a ragionare?”***

➔ Ovviamente **NO**: ciascuno di noi ragiona da sé già da piccolissimo; ognuno, spontaneamente, sa mettere in atto *inferenze*[1], che egli stesso, o chi lo circonda, sa riconoscere come errate o corrette alla luce dell’esperienza. Da **Jhon Henry Newman** [*Grammatica dell’assenso, in Opere,* Jaca Book-Morcelliana, Milano 1980, 159 ss]:

“D’ordinario un ragionamento si formula nella nostra mente come un solo atto e non come una catena, una serie di atti. Apprendiamo la premessa, poi apprendiamo la conseguenza senza esplicitamente riconoscere il loro nesso, come per una spontanea e istantanea congruenza del primo e del secondo pensiero. Quasi per percezione istintiva procediamo da premessa a conclusione, [...] ragioniamo senza sforzo o proposito, e senza che, di necessità, ci sia noto il percorso seguito dalla nostra mente nel procedere da premessa a conclusione.”

Da **Laura Catastini** [Neuroscienze, apprendimento e didattica della matematica, http://www.mat.uniroma2.it/LMM/BCD/SSIS/Neurosc/Immersione/Immersione.htm]:

*“Esiste un momento importante nello svolgersi del nostro pensiero: quello in cui gli oggetti "in entrata" nel nostro sistema percettivo sotto forma di **parole** vengono rappresentati anche sotto forma di **immagine**. Il linguaggio naturale e il corrispondente contenuto immaginativo si creano "per **immersione**", cioè in momenti in cui sono contestualmente presenti alla percezione i fatti e gli oggetti cui le parole si riferiscono.*

In tal modo la parola "martello", ad esempio, si correla all’azione, al materiale di cui è fatto, agli oggetti su cui si applica, al momento emotivo vissuto in concomitanza, a situazioni fisiche ed affettive. Questo corredo non verbale creerà poi associazioni fertili con altro materiale già presente alla mente, fornendoci rappresentazioni di quadri verbali più ricche del semplice contenuto del quadro stesso.

Faccio un esempio: se leggo "i fantini frustavano i cavalli fumanti nella pista gelida" posso "vedere" i cavalli sudati, dal momento che "fumano" nell’ambiente freddo, e certamente non penso i fantini a piedi, o in piedi sul cavallo, anche se nella frase questo particolare non è esplicitato.”

➔ Ma anche **SÌ**: insegna il ragionamento logico-deduttivo; insegna a mettere assieme **attività pratica** (disegno, calcoli, ecc) ad **attività teorica** (i concetti e le immagini mentali connessi all’attività pratica che stiamo svolgendo); insegna a cavarsela con sistemi di segni e significati lontani dall’esperienza personale; insegna a gestire catene di ragionamento lunghe[2]; insegna a gestire un linguaggio tecnico; insegna a integrare fra loro analisi e sintesi; insegna a *prendere coscienza* del proprio ragionamento, a riflettere sul pensiero per orientarlo e organizzarlo.

✘ La matematica, a parte poche cose di base, non ha niente di *spontaneo*: è una costruzione fatta a tavolino dall’essere umano – e continuamente rivista e riorganizzata – in migliaia e migliaia di anni. E in continua evoluzione.

✘ Alcune operazioni logiche sono *naturali*, mentre **la logica** nel suo complesso si impara solo studiando e allenandosi duramente.

Da **Laura Catastini** [Neuroscienze, apprendimento e didattica della matematica, http://www.mat.uniroma2.it/LMM/BCD/SSIS/Neurosc/Immersione/Immersione.htm]:

---

1 **DEF inferenza**: collegamento fra una premessa e una conseguenza.

2 Studi sulle modalità di apprendimento umane sostengono che la memoria “di lavoro” (memoria non *a lungo termine*) riesca e memorizzare solo, al massimo, fra i 5 e i 7 *pacchetti* o anelli (riferendosi appunto a una catena) di ragionamento alla volta. Pensa infatti al modo con cui memorizzi i numeri di cellulare: non impari i singoli numeri in sequenza ma li raggruppi in *pacchetti*, appunto e non più di quattro!

Una delle difficoltà che della matematica, e uno degli aspetti sui quali può avere un effetto positivo fare matematica BENE, è proprio la gestione di catene di ragionamento di lunghezza superiore ai sette anelli. Di fronte a catene lunghe, se non allenati, anche se ciascun “passaggio del ragionamento” è elementare, il ragionamento viene infatti percepito come “difficile”: “ci si *perde*”.

Stesso tipo di problema si presenta d’innanzi alla comprensione di periodi articolati nel parlato: superate le quattro proposizioni, specialmente se subordinate, lo studente medio vacilla. Non è così?

*"…Se invece si legge: "il triangolo ABC ha i lati che misurano rispettivamente 3,4,5", in media, nessuno "vede" il triangolo come rettangolo, pur conoscendo il teorema di Pitagora. C'è in questa situazione la stessa difficoltà a ritrovare forme consuete che si incontra a riconoscere una rosa nella descrizione del **dottor P.**:"Quindici centimetri circa di lunghezza….una forma rossa circonvoluta con un'appendice lineare verde".*

*Davanti alla matematica le persone si comportano come se fossero affette dalla patologia del **dottor P.**, disperatamente attaccati a tutto quello che possa aiutare a ritrovare il mondo delle immagini, e quindi il senso della della familiarità di pensiero, senza però riuscire a trovare il modo giusto.*

Penso allora che bisogna mettere grande attenzione, nell'insegnamento della matematica, al momento della <u>"costruzione" dei</u> <u>modelli mentali</u> [termine che contrappongo a quello dell'<u>immersione</u> spontanea di cui parlavo prima]: immagini mentali che rappresentino correttamente le frasi della matematica"

La geometria razionale ovvero: definire e dimostrare

<u>La **geometria razionale** costituisce il primo **modello logico-deduttivo** consapevole dell'umanità</u>. E' importante conoscerne la struttura in quanto a essa si rifanno gli altri modelli logico-deduttivi **interni** ma anche **esterni** alla matematica: a esempio Newton, riferendosi a tale struttura, ha costruito il proprio modello fisico dell'Universo.

Quello che si studia a scuola non è il sistema originario di **Euclide**, ma la rivisitazione e riorganizzazione di questo operata da **David Hilbert** nel 1800.

La matematica fa ***modelli*** della realtà e per fare questi ***modelli*** per bene deve fare <u>usare</u> (puoi pensare, per semplificare le cose, al ***modello*** di un **oggetto** concreto; lo chiameresti forse *modellino*):

- **L'idealizzazione**: ci si *allontana* dall'oggetto concreto per *conoscerlo meglio*: se ne ricercano elementi caratteristici e generali sia geometrici (ES forme) sia aritmetici (ES misure) per arrivare all'*essenza* dell'oggetto stesso.
- **La precisione**: perché l'astrazione continui a corrispondere all'oggetto di partenza dovrà riprodurre con estrema precisione quelli che abbiamo chiamato ***elementi caratteristici*** dell'oggetto. Pensa ad esempio alla precisione necessaria per distinguere il modello di un DIARIO da quello *confondibile* di un LIBRO!

Mentre conosci già abbastanza bene l'idealizzazione matematica, credo ti sia meno familiare in che modo si realizza la **precisione** in matematica. La precisione si ottiene attraverso due attività: **DEFINIRE** e **DIMOSTRARE**.

DEFINIRE un **sostantivo**, **aggettivo** o **verbo** matematico (in una locuzione unica: un **OGGETTO MATEMATICO**) significa: illustrarne le caratteristiche essenziali, gli aspetti che lo caratterizzano rendendolo quel che è, e differente da ciò che <u>non</u> è, <u>utilizzando unicamente parole già definite</u>[3] e il minor numero di parole possibili (c'è anche un'attenzione all'*eleganza*, oltre che all'*economicità*!).

DEF In tal modo s'innesca un *procedimento all'indietro* e si scopre presto di dover arrivare a scegliere parole <u>sulle quali basare la definizione di tutte le altre</u>: **sostantivi**, **aggettivi** e **verbi FONDAMENTALI**.

Nella geometria del **piano**: **punto**, **retta** e **insieme** sono i <u>sostantivi fondamentali</u>, e: **appartenere**[4] (un punto ad una retta, una retta ad un piano, ecc.), **essere coincidenti** (di figure) e effettuare un **movimento rigido** sono i <u>verbi fondamentali</u>, su cui basare le definizioni.

Ogni **OGGETTO MATEMATICO** matematico va **definito** correttamente per:

- associare a ogni parola <u>l'esatto concetto corrispondente</u>, quindi:
  - **nominare** (dare nome) ai nuovi oggetti che si incontrano
  - **comprendere meglio**[5] il significato delle parole matematiche

[3] Osserva invece come nelle definizioni del dizionario quest'accortezza non viene quasi mai seguita

[4] O, specularmente, **passare per**; una retta per un punto, un piano per una retta, ecc…

- o **sintetizzare**: la parola definita sostituisce la definizione

- poter **operare** correttamente con oggetti matematici: a esempio per risolvere un esercizio riguardante un *quadrato* devi conoscere tutte le caratteristiche del quadrato.
- cominciare a effettuare le prime **deduzioni** sugli oggetti: pensa a come le proprietà delle potenze derivino quasi direttamente dalla definizione di potenza stessa

DIMOSTRARE (**DIM**) è un'attività che si riferisce a **proprietà** e **teoremi** riguardanti oggetti matematici.

Partiamo da alcuni esempi (**ES**): "**se** sommo le ampiezze degli angoli interni di un triangolo ottengo un angolo piatto", "**se e solo** se un quadrilatero è un rettangolo, le sue diagonali sono uguali e si bisecano scambievolmente in parti uguali", "**esiste** un solo punto che divide un segmento in due parti uguali".

Tutte queste frasi sono **teoremi** (**THM**). Nella prima si possono distinguere una premessa e una conseguenza: un'**ipotesi** (**HIP**) e una **tesi** (**TH**), già dalla costruzione della frase: **se**… **allora**…(allora è sottinteso); nella seconda quel "**se e solo se**" ci dice che ***ipotesi*** e ***tesi*** sono intercambiabili: ci sono due proposizioni in una[6]; nella terza l'***ipotesi*** è sottintesa: "dati un segmento e considerati gli infiniti punti ad esso appartenente…".

Vengono chiamate **proprietà** (**PROP**) quei *teoremi* che derivano quasi immediatamente dalla definizione come, le proprietà delle potenze o le proprietà di un triangolo isoscele.

A volte da un teorema o da una proposizione ne conseguono altri in modo così *immediato* da necessitare di dimostrazioni brevissime. Questi si chiamano **corollari** (**COR**).

DEF: **I teoremi** sono *proposizioni* da ***dimostrare***

Che vuol dire **dimostrare**? Vuol dire (**DEF**): costruire una *catena* di proposizioni una *collegata logicamente* all'altra il cui *primo anello* sia l'**ipotesi** e l'*ultimo anello* sia la **tesi** e in cui gli *anelli intermedi* siano costituiti solamente da: teoremi già dimostrati, definizioni, passi di costruzione, postulati o assiomi (dirò fra breve di cosa si tratta).

La possibilità di passare da un anello all'anello successivo è stabilita da regole precise dette: *regole di derivazione logica* o *regole di inferenza*, la definizione delle quali è troppo difficile ma che, viste in azione, nessuno di voi credo discuterà.

DEF Come il definire si basa su parole già definite, il dimostrare *si basa su proprietà già dimostrate*. Procedendo all'indietro, si arriva a scegliere *proprietà fondamentali*: sulle quali basare la dimostrazione di tutte le altre: gli **assiomi** dell'uguaglianza e i **postulati geometrici**: cercali e leggili sul libro.

✘ Teoremi, proprietà e corollari ampliano l'elenco delle caratteristiche degli *oggetti matematici* fornito dalle definizioni e dicono cosa ***si può fare*** con questi. Postulati e assiomi svolgono lo stesso compito dei teoremi, ma in relazione agli *oggetti matematici fondamentali*.

✘ La dimostrazione di un teorema è l'attività matematica che più si lega alla **ricerca della precisione**: una dimostrazione infatti dice che la **tesi** del teorema è una *conseguenza logica* dell'**ipotesi**.

---

[5] Associare ad ogni parola la corrispondente **immagine mentale** senza ambiguità, fornendo a un tempo gli strumenti per metterla in relazione con le altre immagini mentali *già formate*.

[6] "Se un quadrilatero è rettangolo, allora questo ha le diagonali uguali che…" ma anche: "Se le diagonali di un quadrilatero sono uguali e… allora questo è un rettangolo"

Lo schema seguente riassume quanto detto finora:

OGGETTI fondamentali

(punto, retta, piano, insieme – continuità - appartenenza, incidenza, congruenza, ordine)

hanno le seguenti proprietà: →

Postulati e Assiomi

(Sono gli anelli fondamentali delle catene dimostrative dei primi teoremi)

↓ **servono per:**

DEFINIRE

(precisare le caratteristiche peculiari di cui vorremmo che godano gli oggetti, utilizzando parole **già definite**)

↓ **servono per:**

DIMOSTRARE

(Costruire catene di proposizioni, ciascuna già dimostrata e ***conseguenti*** le une alle altre, che abbia come primo anello l'ipotesi e come ultimo la tesi e come anelli intermedi postulati, assiomi o teoremi già dimostrati)

↓ **cosa**

OGGETTI

SOSTANTIVI (poligoni, angoli, ecc), **AGGETTIVI** (uguaglianza, similitudine, equivalenza, ecc…) e **VERBI** (addizionare, sottrarre, trasformare, ecc)

← **riguardano**

↓ **cosa:**

TEOREMI

(proprietà degli oggetti matematici. Sono composti di una premessa, o ipotesti, e di una conclusione, o tesi)

ES di DEF: il Poligono - ASSIOMI dell'uguaglianza - ES di DIM: THM di Pitagora

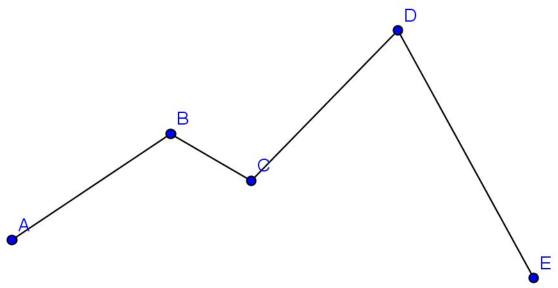
DEF Dati due punti distinti A e B di una retta ***r*** si dice **segmento** AB il sottoinsieme continuo di *r* costituito da A, B e dai punti compresi fra A e B. A e B si dicono *estremi* di AB

DEF dato un insieme **A** (gli insiemi si indicano con lettere in corsivo maiuscolo) diremo che l'insieme **B** è **sottoinsieme** di **A** e lo indicheremo con il simbolo **B**$\subseteq$**A** se ogni elemento di **B** è anche elemento di **A**. In simboli: $\forall b \in B \Rightarrow b \in A$. Se esiste un elemento di **A** che non è elemento di **B** (in simboli: $\exists a \in A, a \notin B$) si dirà che **B** è un **sottoinsieme proprio** ed il simbolo più appropriato sarà: $\subset$ (ma utilizzare l'altro non costituisce errore). Ovviamente in caso contrario **B** coincide con **A**.

DEF Due **segmenti** che hanno in comune un estremo e solo quello si dicono **consecutivi** (sa hanno in comune oltre all'estremo un altro punto saranno coincidenti)

DEF Due **segmenti** *consecutivi* che appartengono alla stessa retta si dicono **adiacenti**

DEF Più segmenti a due a due consecutivi e <u>non</u> adiacenti costituiscono una **poligonale**



DEF I segmenti AB, BC, CD DE si dicono **lati** ed i punti A, B, C, D, E i **vertici** della poligonale. In particolare i vertici A ed E, che appartengono a singoli segmenti: non sono in comune, sono gli **estremi** della poligonale. Se gli estremi coincidono la **poligonale** si dice **chiusa**, se sono distinti **aperta**. Quando due lati <u>non consecutivi</u> hanno un punto in comune, non gli estremi della poligonale, la poligonale si dice **intrecciata**.

DEF Un sottoinsieme del piano cartesiano viene chiamato **figura piana**

DEF Poligono è una *figura piana continua* delimitata da una poligonale chiusa <u>non</u> intrecciata.

DEF Due figure si dicono **congruenti**[7] quando con un movimento rigido è possibile portare una di esse a *coincidere punto per punto con l'altra*.

Assiomi dell'uguaglianza

Per l'uguaglianza valgono le seguenti proprietà (valide anche per: parallelismo, congruenza e equivalenza: prova a sostituire al simbolo di = ciascuno dei precedenti e vedrai)

Proprietà **riflessiva** (nel senso dello specchio): per ogni elemento A vale cioè A=A

Proprietà **simmetrica** (importante per le equazioni): se è vero A=B allora è vero anche: B=A

Proprietà **transitiva** : se A=B e B=C allora anche: A=C

E la proprietà **invariantiva** (importantissima per risolvere le equazioni e valida solo dove abbia senso definire addizione e sottrazione, quindi <u>non</u> il parallelismo)

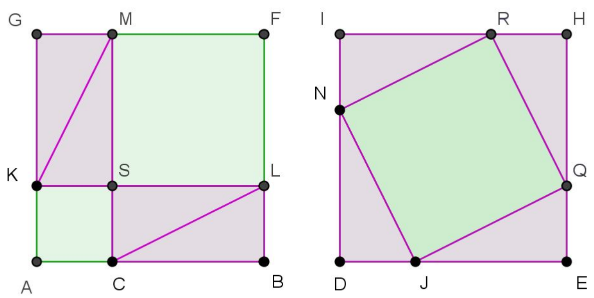
Data un'uguaglianza vera: A=B saranno vere anche le seguenti eguaglianze che saranno dette equivalenti ad A=B:

A+C=B+C ; A-C=B-C ; AC=BC ; $\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$

Per convincertene pensa l'uguaglianza come l'equilibrio di una bilancia a due piatti.

Teorema di Pitagora: "*In un triangolo rettangolo* (HIP), <u>il quadrato costruito sull'ipotenusa è **equivalente**</u> (stessa area) <u>alla somma dei quadrati costruiti sui cateti</u> (TH)".

L'enunciato di questo teorema, come di quasi tutti i teoremi geometrici, può essere *affiancato* da un disegno. Misura la lunghezza dei cateti GM GK del disegno seguente e disegna un triangolo rettangolo ABC congruente a GKM sul quale **rappresenta il teorema.**



Il quadrato costruito sul cateto minore dovrà essere congruente a ACSK, il quadrato costruito sul cateto maggiore dovrà essere congruente a SLFM ed il quadrato costruito sull'ipotenusa dovrà essere congruente a JQRN.

DIM I quadrati ABFG e DEHI sono congruenti → Il quadrato JQRN si può ottenere sottraendo da DEHI 4 triangoli tutti congruenti al triangolo ABC → Ma anche la somma fra i quadrati ACSK e SLFM si può ottenere sottraendo da ABFG, congruente a DEHI, 4 triangoli congruenti ad ABC. → Dalla **proprietà invariantiva** dell'uguaglianza (o dell'equivalenza) la tesi: $A_{JQRN}=A_{ACSK}+A_{SLFM}$ (o: JQRN ≡ ACSK+SLFM attenzione ai simboli!).

In che modo viene utilizzata l'ipotesi che dovrebbe essere il *primo anello della catena dimostrativa*? Proprio per i disegni qui sopra: se ABC <u>non</u> fosse rettangolo potresti farli?

[7] Assumiamo la convenzione che una figura sia uguale solo a sé stessa