Il Teroema di Gauss

Lo studio del comportamento dei **fluidi** ha fornito spunti interessanti per lo studio di fenomeni differenti, ad esempio il **calore**. Fra questi fenomeni c'è anche il **campo elettrico**.

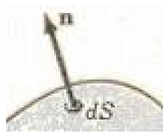
Due sono le grandezze che caratterizzano il comportamento di un fluido:

- il **flusso** (o portata) attraverso una superficie: volume di fluido che attraversa in un secondo quella superficie

- la presenza o meno di *turbolenze* in un fluido: sorgenti o vortici.

Le stesse due grandezze saranno scelte dalla comunità dei fisici per determinare cosa distingue un campo dall'altro[1]. Vediamo in che modo:

Flusso del campo E attraverso una superficie S: $\Phi_S(E)$



Il campo elettrico è una grandezza vettoriale, quindi dovremo trovare un modo per rendere *vettoriale* anche la superficie! Per far questo si associa ad ogni superficie un versore ad essa perpendicolare, chiamato **versore normale**: $\hat{n}$.

La *quantità di campo* che attraversa una superficie **S** dipende da tre fattori:

- La misura dell'**area** della superficie **S**

- l'intensità del campo **E**

- l'**inclinazione** della superficie rispetto al campo.

Consideriamo per semplicità un **campo costante** (linee di campo parallele fra loro). Se la superficie è perpendicolare alle linee di campo il flusso sarà massimo, se la superficie sarà parallela alle linee di campo il flusso sarà nullo. Guarda nei due casi descritti come è posizionata la *normale alla superficie*:

Nel primo caso l'angolo formato fra $\hat{n}$ e le linee del campo $\vec{E}$ è 0, nel secondo è 90°. Qual è quella grandezza che ha valore massimo in relazione ad un angolo 0 e vale zero per un angolo di 90°? Il *coseno*!

Chiamiamo α l'angolo formato da $\hat{n}$ ed $\vec{E}$.

---

[1] Per lo studio del campo elettrostatico, dovrai pensare ad un **fluido ideale** (*incomprimibile* e con coefficiente di *viscosità interna* nullo) e **stazionario**, cioè la cui velocità non varia nel tempo

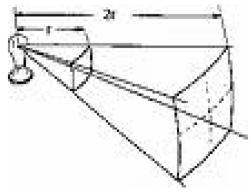
Mettendo insieme i tre fattori determinanti per il calcolo del flusso avremo:

$$\Phi_S(E) \overset{def}{\equiv} \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot \cos\alpha \qquad \text{(cioè il } \textit{prodotto scalare}\text{)}$$

La **I equazione di Maxwell**[2] (già **teorema di Gauss**) dice che: *dato un* ***campo elettrico*** *generato da una distribuzione di* ***N*** *cariche, il* ***flusso*** *di tale campo attraverso una superficie chiusa* ***S*** *di qualunque forma, che racchiuda le cariche, è proporzionale (costante di proporzionalità:* $\frac{1}{\varepsilon_0}$*) alla somma delle cariche stesse. In simboli:*

$$\Phi_S(E) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\varepsilon_0}$$

Dimostrazione del Teorema di Gauss



Il **Thm di Gauss** è una diretta conseguenza della propagazione del campo con la legge dell'*inverso del quadrato*.

Dimostriamolo cominciando con il calcolare il flusso del campo generato da una **carica puntiforme** attraverso spicchi ΔS_i di due **superfici sferiche** (di raggio r e 2r): S_1 e S_2, divise in N spicchi.

Ciascuno spiacchio avrà superficie: $\frac{\Delta S_i}{N}$.

Il flusso del campo **E** attraverso ΔS_1 (raggio ***r***) e ΔS_2 (raggio ***2r***) è lo stesso!

Infatti si ha: $\Phi_{\Delta S1}(E) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \cdot \frac{4\pi r^2}{N} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot N} = \Phi_{\Delta S2}(E) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(2r)^2} \cdot \frac{4\pi(2r)^2}{N} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot N}$.

La superficie aumenta con legge inversa rispetto al campo, quindi il raggio della superficie è ininfluente al fine di valutare l'intensità del flusso del campo elettrico che l'attraversa.

Per ottenere il **teorema di Gauss** – relativo a una carica contenuta in una superficie sferica (di raggio qualunque, abiamo visto), – basterà moltiplicare per N il risultato ora ottenuto per uno spicchio: $N \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0 N} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$.

A questo punto potresti pensare che il teorema di Gauss valga sì, ma solo per superfici **simmetriche**. Non è così: vale per una **superficie qualunque**.

---

[2] In realtà la **I equazione di Maxwell** "vera" è scritta in *forma differenziale*.

Puoi per convincerti che ogni superficie, per quanto irregolare possa essere, può essere approssimata con *gradini infinitesimali,* ciascuno con *pareti* parallele alle linee di campo e *parti piane*, ricavate come *spicchi di una sfera*, quindi perpendicolari alle linee di campo.

Il flusso attraverso le *pareti* dei gradini sarà nullo e contribuiranno effettivamente al calcolo del flusso complessivo solo le superfici di tali gradini, fornendo lo stesso valore, *indipendentemente dal raggio*, delle circonferenze di cui sono una porzione.

Sommando tutti i contributi effettivi otterremo quindi lo steso valore che abbiamo ottenuto per una sfera, e cioè il risultato del teorema di Gauss.

Manca un ultimo passo: il teorema parla di una distribuzione di *n* cariche e per ora la dimostrazione è stata incentrata sul campo generato da una sola carica puntiforme.

Come si fa a passare all'enunciato generale? Grazie al ***principio di sovrapposizione***.

In virtù di questo sarà infatti: $\sum_{k=1}^{n}\Phi_S(E_k)=\Phi_S(\sum_{i=1}^{n}E_k)=\frac{\sum_{k=1}^{n}Q_k}{\varepsilon_0}$ *come volevasi dimostrare*.

N.B. Per lo stesso tipo di ragionamento seguito fin qui, e tenendo conto del fatto che il *coseno di 180° è -1*, se le **cariche** sono tutte **esterne** ad una superficie chiusa **S**, il flusso complessivo del campo da esse generato, attraverso la superficie stessa, sarà 0! Prova a fare un disegno con una carica sola e a ragionarci su da sola/o.

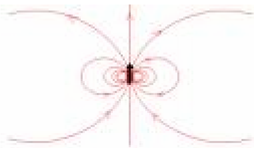
Il Teorema di Gauss, l'ho già detto, è una conseguenza della legge dell'inverso del quadrato. A che serve? Serve a stabilire il campo elettrostatico generato da configurazioni di cariche per le quali l'applicazione del principio di sovrapposizione sarebbe improba (guarda sul libro). Quindi la sua applicazione principale è, in qualche modo, a ritroso...

Il libro deriva dal Teorema di Gauss le proprietà di un corpo carico cavo (gabbia di Faraday) che, in un filmato PSSC, abbiamo visto come diretta conseguenza della legge dell'inverso del quadrato. Se hai compreso l'incipit del capoverso precedente non dovrebbe stupirti.

Seguono anticipazioni sul campo magnetico che consiglio di leggere solo a* veramente curios*.

Confronto fra campo elettrostatico e magnetico

A "cariche ferme" già si ravvisa una simmetria fra magnetismo ed elettricità. Confronta infatti nella tabella la prima cella della prima colonna con la terza della seconda colonna, e la terza cella della prima colonna con la prima della seconda colonna:

Campo elettrostatico (E)	**Campo magnetostatico (B)**
$\Phi_S(E) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\varepsilon_0}$	 Qualunque superficie racchiuda un dipolo magnetico vedrà il *flusso in uscita* perfettamente bilanciato da un *flusso in entrata* di ugual intensità. La somma del flusso in entrata e del flusso in uscita sarà pertanto complessivamente nullo. $\Phi_S(B) = 0$
Il campo è *conservativo*. Quindi è possibile attribuire ad una carica di prova posta in una certa posizione, un'**energia potenziale**. Quindi è possibile attribuire a quella data **posizione** un **potenziale**[3]. La **differenza di potenziale** fra due punti dello spazio, o di un conduttore, è in grado di **mettere in moto cariche**	Il campo magnetico **non è** conservativo (non gode infatti delle particolari **simmetrie** di cui godono i campi conservativi che conosci)
La conservatività del campo elettrostatico si esprime matematicamente dicendo che: *la* ***circuitazione*** *di un campo elettrostatico lungo una qualsiasi linea chiusa orientata L è nulla*. In simboli: $\Gamma_L(\vec{E}) = 0$	La **non** conservatività del campo magnetico si esprime matematicamente dicendo che: *la circuitazione di un campo magnetico lungo una qualsiasi linea chiusa orientata L è proporzionale alla <u>somma algebrica delle correnti racchiuse all'interno di questa linea</u>*. In simboli: $\Gamma_L(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \sum_{k=1}^{n} i_k$

[3] Il concetto di **campo** *sta* al concetto di **forza** come il concetto di **potenziale** *sta* al concetto di **energia potenziale**: sia il *campo* che il *potenziale* possiamo considerarle come "densità" (di forza e di energia potenziale, rispettivamente) e si riferiscono alla **posizione** piuttosto che all'**interazione**.

Per passare dall'energia potenziale al potenziale infatti (come già fatto per passare dalla forza al campo), <u>si divide per la carica di prova l'energia potenziale</u>. Per un campo elettrostatico generato da una carica puntiforme l'eneriga potenziale è data da: $k \cdot \dfrac{Q \cdot q}{r}$ mentre il potenziale è dato da: $k \cdot \dfrac{Q}{r}$. Senza calcolo integrale i conti sono orrendi, fidati!