La geometria del piano: DEFINIRE

DEFINIRE un **OGGETTO MATEMATICO** significa darne le caratteristiche essenziali e specifiche: quelle che lo rendono quel che è (ne hai già studiate tante di **DEF**!).

ES Un **triangolo** è una parte di piano delimitata da una poligonale chiusa di tre lati.

N.B. Non si elencano TUTTE le caratteristiche di un oggetto, ma solo quelle che BASTANO a "vederlo" e "costruirlo" (vedremo con **GGB** in che modo).

A che serve **DEFINIRE**? In matematica è molto importante. Serve infatti a:

- ♥ **dare un nome** agli oggetti matematici (quasi sempre un nome UNICO)
- ♥ **capire meglio** cosa sono questi oggetti e distinguerli fra loro
- ♥ **sintetizzare** (invece di dire "quadrilatero con lati paralleli" puoi dire: *parallelogramma*)
- ♥ **risolvere esercizi** e problemi di geometria
- ♥ scoprire le **proprietà** degli oggetti (pensa, per esempio, a come le proprietà delle potenze sono una conseguenza della definizione di potenza).

In una **DEF** si utilizza il minor numero di parole possibile e solo parole già definite.

Si scopre presto che non si può definire TUTTO TUTTO ma che alcune parole si devono "dare per scontate". Queste parole si chiamano: **sostantivi**, **aggettivi** e **verbi PRIMITIVI** (a pag **G2** la differenza tra rappresentazione di un concetto e concetto in sé).

- ♥ **punto**, **retta**, e, **insieme** (**parte**, ecc) sono i sostantivi primitivi, della geometria del **piano** (anche il concetto di **piano** non si definisce).
- ♥ **appartenere** (un punto ad una retta, una retta ad un piano, ecc.), **passare per** (una retta per un punto, un piano per una retta, ecc…) **delimitare**, **coincidere** e **muovere senza cambiare angoli e dimensioni**, sono i verbi primitivi.
- ♥ Gli **aggettivi primitivi** derivano dai verbi primitivi: appartenente, coincidente, ecc...

EX 1 con **GGB** Disegna una **poligonale aperta** (pag. G7), una **poligonale chiusa** e una **poligonale intrecciata** e scrivi accanto ai disegni le **definizioni** del libro.

EX 2 con **GGB** Cerca nel libro le definizioni di tutte le parole che si trovano nella definizione di poligonale. Copia queste definizioni e fai il disegno accanto (utilizzando le definizioni date, anche se GGB ti consentirebbe di seguire scorciatoie!).

EX 3 con **GGB** Copia la definizione di **punto medio** che si trova a pag. G13 ed esegui la costruzione indicata. Cerca poi in GGB il pulsante "punto medio" e verifica la tua costruzione. Cosa puoi dire dell'angolo CMB? E delle lunghezze dei segmenti AC e CB?

EX 4 con **GGB** Copia la definizione di **angolo** a pag G8 e disegna un angolo. Poi vai a pag G14 ed effettua la costruzione di un **angolo congruente** al precedente. Verifica con l'opzione "trascinamento" che modificando il primo angolo il secondo resti congruente!

EX 5 on **GGB** Copia la definizione di **bisettrice** di un angolo a pag G16 e fai la costruzione indicata. Cerca poi in GGB il pulsante "bisettrice di un angolo" e verifica che la tua costruzione sia esatta.

La geometria del piano: DIMOSTRARE

DIMOSTRARE (**DIM**) è un'attività che si riferisce a **proprietà** e **teoremi** riguardanti oggetti matematici Partiamo da alcuni esempi (**ES**): "**se** sommo le ampiezze degli angoli interni di un triangolo **allora** ottengo un angolo piatto", "**se e solo** se un quadrilatero è un rettangolo, le sue diagonali sono uguali e si bisecano scambievolmente in parti uguali", "**esiste** un solo punto che divide un segmento in due parti uguali".

Tutte queste frasi sono **teoremi** (**THM**). Nella prima frase si possono distinguere una premessa e una conseguenza cioè: un'**ipotesi** (**HIP**) e una **tesi** (**TH**), già dalla costruzione della frase: **se**… **allora**…; nella seconda quel "**se e solo se**" ci dice che ***ipotesi*** e ***tesi*** sono *intercambiabili*: ci sono due proposizioni in una[1]; nella terza l'***ipotesi*** è sottintesa: "dati un segmento e considerati gli infiniti punti ad esso appartenente…".

Vengono chiamate **proprietà** (**PROP**) quei *teoremi* che derivano quasi immediatamente dalla definizione come, le **proprietà** delle **potenze** o le proprietà di un triangolo isoscele.

A volte da un teorema o da una proposizione ne conseguono altri in modo così *immediato* da necessitare di dimostrazioni brevissime. Questi si chiamano **corollari** (**COR**).

DEF: **I teoremi** sono *proposizioni* da ***dimostrare***

Che vuol dire **dimostrare**? Vuol dire (**DEF**): costruire una *catena* di proposizioni una *conseguente* all'altra il cui *primo anello* sia l'**ipotesi** e l'*ultimo anello* sia la **tesi** e in cui gli *anelli intermedi* possano essere solo: teoremi già dimostrati, definizioni, passi di costruzione, postulati o assiomi (dirò fra breve di cosa si tratta), calcoli.

DEF Come il definire si basa su parole già definite, il dimostrare *si basa su frasi già dimostrate*. Procedendo all'indietro, si arriva a *proprietà fondamentali*: sulle quali basare la dimostrazione di tutte le altre: gli **assiomi** dell'uguaglianza e i **postulati geometrici**.

- Teoremi, proprietà e corollari aggiungono informazioni alle caratteristiche degli *oggetti matematici* già fornite dalle definizioni e dicono cosa ***si può fare*** con questi oggetti.
- Postulati e assiomi svolgono lo stesso compito dei teoremi, ma per gli *enti primitivi*.
- La dimostrazione di un teorema è l'attività matematica che maggiormente si lega alla **ricerca della precisione**: una dimostrazione infatti garantisce che la conclusione del teorema (la TESI) è una *conseguenza logica* della premessa (cioè dell'IPOTESI).
- Spesso la tesi è convincente in sé: ci dà un'informazione cui non abbiamo alcun problema a credere.

La dimostrazione non serve infatti a convincerci del fatto che è vera una proposizione ma a garantire che è una conseguenza di quello che si è dimostrato prima. Cioè che non possono essere due teoremi con tesi opposte che si possano dimostrare tutt'e due!

ESEMPI di dimostrazioni li hai già visti in aritmetica: *perché* $\boldsymbol{a}^0=1$; *perché* le **proprietà** delle **potenze** *funzionano in quel modo*, *perché* i ¾ di 120 sono: ¾ ·120!

Chi sa dimostrare non può essere imbrogliato da *falsi* ragionamenti!

[1] "Se un quadrilatero è rettangolo, allora questo ha le diagonali uguali che..." ma anche: "Se le diagonali di un quadrilatero sono uguali e... allora questo è un rettangolo"

Mappa concettuale della geometria del piano

OGGETTI primitivi

(punto, retta, piano, insieme – continuità - appartenenza, incidenza, congruenza, ordine)

hanno le seguenti proprietà: →

Postulati e Assiomi

(Sono gli anelli fondamentali delle catene dimostrative dei primi teoremi)

↓ **servono per:**

DEFINIRE

(precisare le caratteristiche peculiari di cui vorremmo che godano gli oggetti, utilizzando parole **già definite**)

↓ **servono per:**

DIMOSTRARE

(Costruire catene di proposizioni, ciascuna già dimostrata e ***conseguenti*** le une alle altre, che abbia come primo anello l'ipotesi e come ultimo la tesi e come anelli intermedi postulati, assiomi o teoremi già dimostrati)

↓ **cosa**

OGGETTI

SOSTANTIVI (poligoni, angoli, ecc), **AGGETTIVI** (uguaglianza, similitudine, equivalenza, ecc…) e **VERBI** (addizionare, sottrarre, trasformare, ecc)

↓ **cosa:**

TEOREMI

(proprietà degli oggetti matematici. Sono composti di una premessa, o ipotesi, e di una conclusione, o tesi)

riguardano ←

ES di DEF: il Poligono - ASSIOMI e POSTULATI - ES di DIM: THM di Pitagora

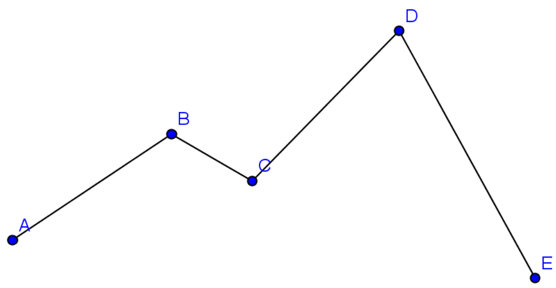
DEF Dati due punti distinti A e B di una retta ***r*** si dice **segmento** AB il sottoinsieme continuo di *r* costituito da A, B e dai punti compresi fra A e B. A e B si dicono *estremi* di AB

DEF dato un insieme **A** (gli insiemi si indicano con lettere in corsivo maiuscolo) diremo che l'insieme **B** è **sottoinsieme** di **A** e lo indicheremo con il simbolo **B**$\subseteq$**A** se ogni elemento di **B** è anche elemento di **A**. In simboli: $\forall b \in B \Rightarrow b \in A$. Se esiste un elemento di **A** che non è elemento di **B** (in simboli: $\exists a \in A, a \notin B$) si dirà che **B** è un **sottoinsieme proprio** ed il simbolo più appropriato sarà: $\subset$ (ma utilizzare l'altro non costituisce errore). Ovviamente in caso contrario **B** coincide con **A**.

DEF Due **segmenti** che hanno in comune un estremo e solo quello si dicono **consecutivi** (sa hanno in comune oltre all'estremo un altro punto saranno coincidenti)

DEF Due **segmenti** *consecutivi* che appartengono alla stessa retta si dicono **adiacenti**

DEF Più segmenti a due a due consecutivi e <u>non</u> adiacenti costituiscono una **poligonale**



DEF I segmenti AB, BC, CD DE si dicono **lati** ed i punti A, B, C, D, E i **vertici** della poligonale. In particolare i vertici A ed E, che appartengono a singoli segmenti: non sono in comune, sono gli **estremi** della poligonale. Se gli estremi coincidono la **poligonale** si dice **chiusa**, se sono distinti **aperta**. Quando due lati <u>non consecutivi</u> hanno un punto in comune, non gli estremi della poligonale, la poligonale si dice **intrecciata.**

DEF Un sottoinsieme del piano cartesiano viene chiamato **figura piana**

DEF Poligono è una *figura piana continua* delimitata da una poligonale chiusa <u>non</u> intrecciata.

DEF Due figure si dicono **congruenti**[2] quando con un movimento rigido è possibile portare una di esse a *coincidere punto per punto con l'altra.*

Assiomi dell'uguaglianza

Per l'uguaglianza valgono le seguenti proprietà (valide anche per: parallelismo, congruenza e equivalenza: prova a sostituire al simbolo di = ciascuno dei precedenti e vedrai)

Proprietà **riflessiva** (nel senso dello specchio): per ogni elemento A vale cioè A=A

Proprietà **simmetrica** (importante per le equazioni): se è vero A=B allora è vero anche: B=A

[2] Assumiamo la convenzione che una figura sia uguale solo a sé stessa

Proprietà **transitiva** : se A=B e B=C allora anche: A=C

E la proprietà **invariantiva** (importantissima per risolvere le equazioni e valida solo dove abbia senso definire addizione e sottrazione, quindi non il parallelismo)

Data un'uguaglianza vera: A=B saranno vere anche le seguenti eguaglianze che saranno dette equivalenti ad A=B:

A+C=B+C ; A-C=B-C ; AC=BC ; $\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$

Per convincertene pensa l'uguaglianza come l'equilibrio di una bilancia a due piatti.

Postulati della geometria piana

I postulato Dati due punti distinti A e B, esiste una ed una sola retta passante per essi

Cor Due rette distinte non possono avere più di un punto in comune

II postulato Ogni retta *r* è un insieme *continuo* e *ordinato*[3] di punti. Tale che[4]:

- presi su *r* due punti distinti A e B esiste sempre un punto C di *r* fra essi compreso (ES: se A < B allora sarà A < C < B)
- preso su *r* un punto C, esisteranno sempre due punti A e B di r fra i quali C è compreso.

Cor 1 Fra due punti A e B di *r* sono compresi infiniti punti appartenenti ad *r*

Cor 2 Ogni punto C di una retta *r* è preceduto e seguito da infiniti punti di *r*

Cor 3 Ogni retta è un insieme infinito di punti

III postulato Dato un punto P del piano, esistono rette che non lo contengono

Cor 1 Esistono infinite terne di punti non allineati

Cor 2 per ogni punto passano infinite rette

Cor 3 Esistono infiniti punti non appartenenti ad un'assegnata retta *r*

IV postulato Date due rette orientate *r* ed *s* e due loro punti A (di *r*) e B (di *s*) esistono due movimenti rigidi che portano *r* a coincidere con *s*, con A su B: l'uno fa coincidere le due orientazioni, l'altro le dispone in senso opposto.

Cor Tutte le rette sono uguali

V postulato Data una retta ***r*** ed un punto P esterno ad essa esiste una ed una sola retta ***s*** passante per P e non avente nessun punto in comune con la retta ***s***

DEF Due **rette** del piano si dicono **parallele** se coincidono oppure se non hanno nessun punto in comune

Cor Data una retta *r* ed un punto P del piano (appartenente o no ad *r*), per P si può condurre una ed una sola retta *s* parallela ad *r*

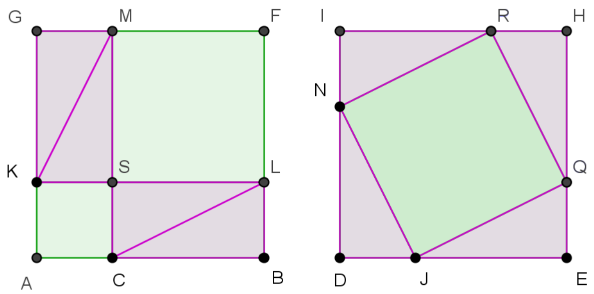
Teorema di Pitagora: "*In un triangolo rettangolo* (HIP), il quadrato costruito sull'ipotenusa è **equivalente** (stessa area) alla somma dei quadrati costruiti sui cateti (TH)".

---

3 Dati due punti distinti A e B di essi si può individuare quale precede l'altro: o A < B o A > B.

4 Segue DEF della ***densità*** di *r* che è un concetto *più debole* della continuità ma più facile da definire

L'enunciato di questo teorema, come di quasi tutti i teoremi geometrici, può essere *affiancato* da un disegno. Misura la lunghezza dei cateti GM GK del disegno seguente e disegna un triangolo rettangolo ABC congruente a GKM sul quale **rappresenta il teorema.**



Il quadrato costruito sul cateto minore dovrà essere congruente a ACSK, il quadrato costruito sul cateto maggiore dovrà essere congruente a SLFM ed il quadrato costruito sull'ipotenusa dovrà essere congruente a JQRN.

DIM I quadrati ABFG e DEHI sono congruenti → Il quadrato JQRN si può ottenere sottraendo da DEHI 4 triangoli tutti congruenti al triangolo ABC → Ma anche la somma fra i quadrati ACSK e SLFM si può ottenere sottraendo da ABFG, congruente a DEHI, 4 triangoli congruenti ad ABC. → Dalla **proprietà invariantiva** dell'uguaglianza (o dell'equivalenza) la tesi: $A_{JQRN} = A_{ACSK} + A_{SLFM}$ (o: JQRN ≡ ACSK+SLFM attenzione ai simboli!).

In che modo viene utilizzata l'ipotesi che dovrebbe essere il *primo anello della catena dimostrativa*? Proprio per i disegni qui sopra: se ABC non fosse rettangolo potresti farli?