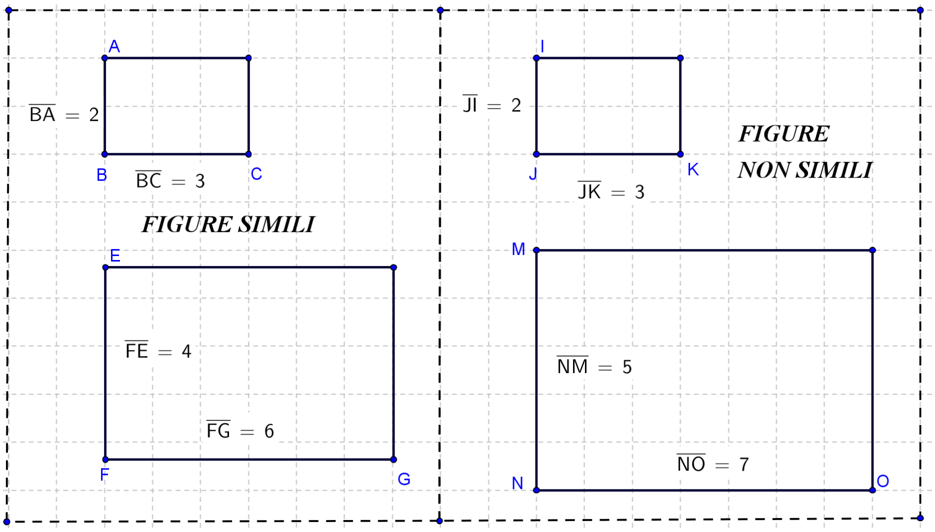
Figure simili – Teorema di Talete – Pendenza di una retta

In italiano si dicono *simili* cose o persone che si assomigliano molto ma che non sono *uguali*. In matematica si dicono **simili**, **figure** "in scala"; in proporzione.

In figura due coppie di rettangoli con le misure dei lati. Perché i rettangoli della prima coppia sono simili e quelli della seconda, no?



DEF Due figure sono **simili** *se e solo se* hanno i lati *corrispondenti* <u>in proporzione</u>.

Nelle prima coppia qui sopra puoi vedere come il rapporto tra le misure dei lati del rettangolo piccolo sia: 2/3, come pure per il rettangolo grande. Infatti: 4/6=2/3.

Non vale lo stesso per la seconda coppia di rettangoli: in quello piccolo il rapporto delle misure dei lati è sempre 2/3, mentre per il rettangolo grande è 5/7.

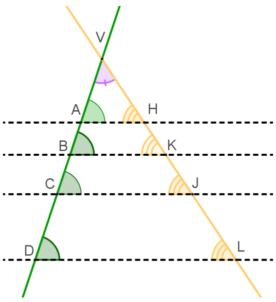
Per questo i primi due rettangoli sono simili e gli altri no.

Criterio di similitudine per i triangoli

Solo per i **triangoli** (valendo sempre la definizione sopra) c'è anche un **criterio di similitudine**: <u>due triangoli sono simili *se e solo se* hanno tutti gli angoli uguali.</u>

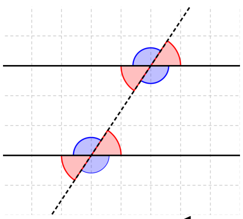
Questo dipende dal fatto che un triangolo è dato dall'*intersezione di tre angoli*. E' perciò l'ampiezza degli angoli a distinguere la "forma" di un triangolo dalla "forma" di un altro.

Il Teorema di Talete



Il Teorema di Talete dice che: "Se prendiamo due rette trasversali (che s'intersecano, a un certo punto, perciò) e le *tagliamo* con delle rette parallele, vengono a formarsi <u>coppie di segmenti *corrispondenti* che sono in proporzione</u>".

Il Teorema di Talete è *conseguenza* del **Teorema fondamentale** delle **rette parallele tagliate da trasversale** e del criterio di similitudine dei triangoli.

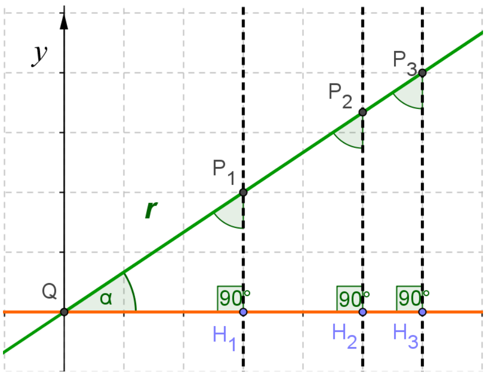


Il **Teorema fondamentale** delle **rette parallele tagliate da trasversale** dice infatti che: due rette parallele tagliate da una trasversale formano angoli ***corrispondenti*** e ***alterni*** congruenti (quelli segnati in figura).

Infatti, per il criterio di similitudine dei triangoli, i triangoli: VAH, VBK, VCJ, VDL sono simili tra loro e perciò hanno i lati corrispondenti in proporzione.

A causa poi delle mille proprietà delle proporzioni, anche i segmenti corrispondenti VA e VH, AB e HK, BC e KJ, ecc... sono in proporzione.

Il Teorema di Talete e la pendenza di una retta nel piano cartesiano



Vediamo il Teorema di Talete "in azione" su una configurazione di rette che ci serve per ripassare la **pendenza** di una retta nel piano cartesiano.

Le **rette trasversali** le ho disegnate di nuovo una **verde**, ***r***, e una **gialla**.

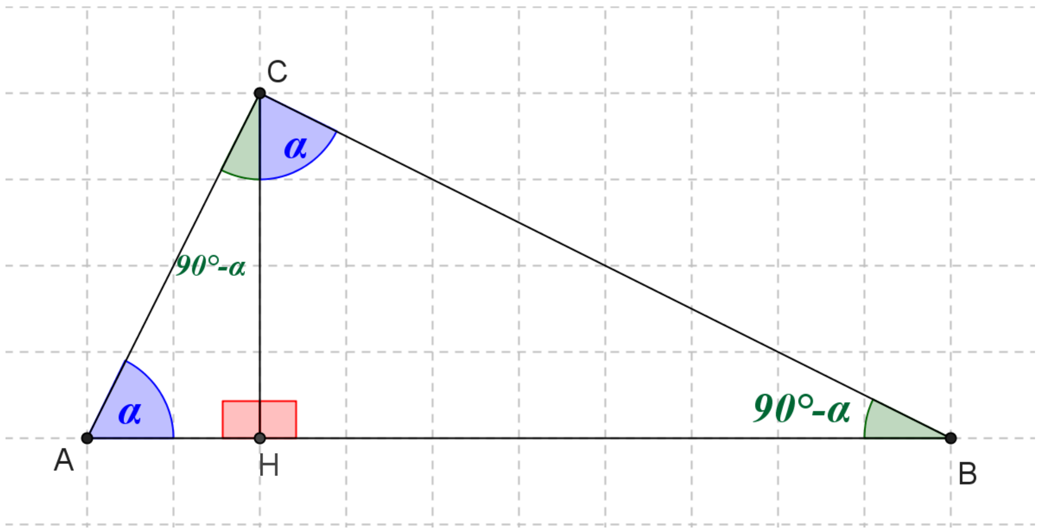
La retta **gialla** è parallela all'*asse x*.

Le due rette s'incontrano in **Q** (il punto d'intersezione della retta ***r*** con l'*asse y*). Le **rette parallele** le ho disegnate tratteggiate e perpendicolari alla retta **gialla**.

I *segmenti corrispondenti* sono in *proporzione* perché i **triangoli** che si formano (rettangoli in questo disegno), sono tutti **simili** tra loro in quanto hanno gli **angoli uguali** [uno di 90°, uno in comune, α, e l'altro che misura: 90°- α (perché la somma degli angoli interni di un triangolo misura 180° = (90°) +(α)+ (90°- α)].

In particolare sarà: $\frac{P_1H_1}{QH_1}=\frac{P_2H_2}{QH_2}=\frac{P_3H_3}{QH_3}=\frac{2}{3}=\;\; pendenza\;\; di\;\; r$

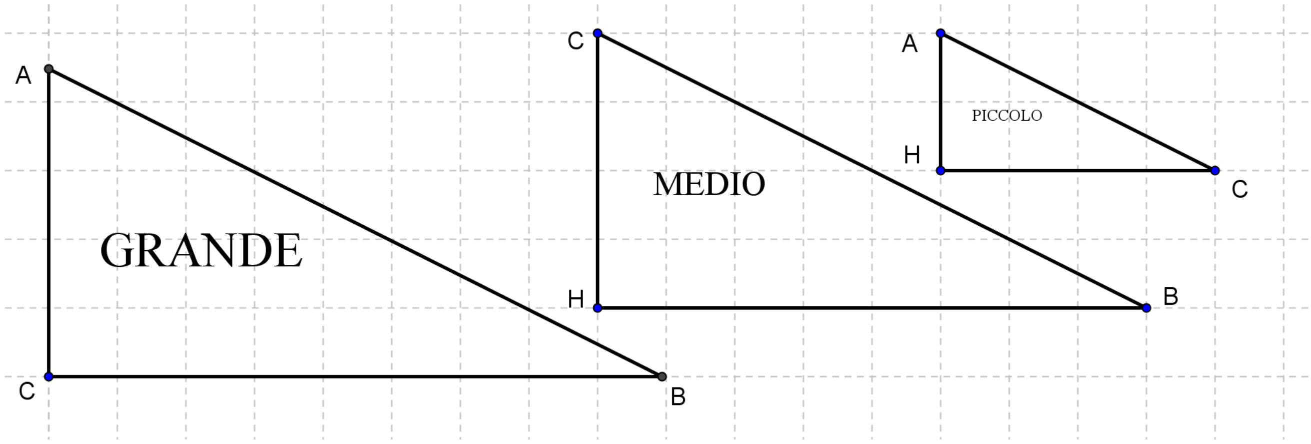
I Teoremi di Euclide come conseguenza della similitudine di triangoli



Osserva il triangolo **ABC**, rettangolo in **C** e *poggiato sull'ipotenusa* **AB**. I triangoli **AHC** e **CHB** hanno angoli corrispondenti uguali e uguali a quelli di **ABC**!

Prendiamo per esempio il triangolo **AHC**: è rettangolo in **H** perciò la somma delle misure degli angoli **A** e **C** dev'essere 90°. Chiamiamo α la misura dell'angolo **A**, la misura dell'angolo **C** sarà: (90° - α). Fai la prova: se sommi le tre misure otterrai 180°.

Perciò i tre triangoli rettangoli: **ABC**, **AHC** e **CHB**, sono **simili** tra loro. Te li disegno qui sotto messi in modo che tu possa convincertene meglio:

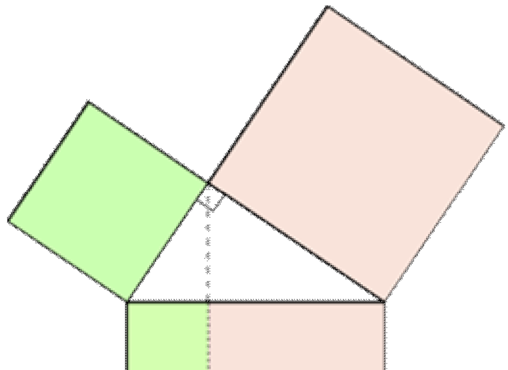


Il primo Teorema di Euclide

N.B. Nelle righe che seguono il simbolo AB indicherà: "La misura del segmento AB" e non il segmento **AB**. Normalmente la ***misura*** di un segmento si indica con una sbarretta sopra il "nome" del segmento ma, per motivi tecnici, non seguirò la convenzione che TU, invece, DEVI seguire sul tuo quaderno.

"Nel *triangolo piccolo* AHC la misura del cateto piccolo AH *sta* alla misura dell'ipotenusa AC *come*, nel *triangolo grande* ABC, la misura del cateto piccolo AC *sta* alla misura dell'ipotenusa AB. Scrivendo e sviluppando[1] la proporzione (AH **:** AC = AC **:** AB) si ottiene il **primo Teorema di Euclide**: $\mathbf{AC^2=AH\cdot AB}$.

Il **I Teorema di Euclide** a **parole**, si enuncia così: "In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto (AC) è *equivalente* al rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa (AB) e la *proiezione del cateto sull'ipotenusa stessa* (AH)".



Graficamente il I Teorema d'Euclide è rappresentato dalla parte in verde (a sinistra) del disegno a fianco.

"Nel *triangolo medio* CHB la misura del cateto grande HB alla misura dell'ipotenusa CB *come*, nel *triangolo grande* ABC, la misura del cateto grande CB *sta* alla misura dell'ipotenusa AB. Scrivendo e sviluppando la proporzione: HB**:**CB=CB**:**AB) si ottiene il **primo Teorema di Euclide**: <u>relativo all'altro cateto</u>: $\mathbf{CB^2=HB\cdot AB}$.

Il Teorema di Pitagora come conseguenza del I Teorema di Euclide

Mettendo assieme gli enunciati del Teorema di Euclide per i due cateti, **AC** e **CB**, si ha il **Teorema di Pitagora**. In figura puoi infatti vedere come i due rettangoli costruiti sulle *proiezioni dei cateti sull'ipotenusa*, messi assieme, formano il **quadrato** costruito sull'ipotenusa.

Inoltre, sommando *membro a membro* (il <u>primo</u> membro della prima uguaglianza con il <u>primo</u> membro della seconda uguaglianza e così via; ce lo consente il principio di

[1] Ricorda: la **proprietà fondamentale** delle **proporzioni** dice che: il prodotto dei medi (i termini vicino all' "=") è uguale al prodotto degli estremi.

equivalenza) le uguaglianze che esprimono il I Teorema di Euclide – e cioè: $CB^2=HB\cdot AB$ e: $AC^2=AH\cdot AB$ – si ha:

$$CB^2 + AC^2 = HB\cdot\mathbf{AB}+AH\cdot\mathbf{AB}$$

Raccogliendo a fattor comune poi, si ha: $CB^2 + AC^2 = (HB+AH)\cdot AB$

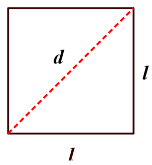
Ma HB + AH = **AB** e perciò: $\mathbf{CB^2+ AC^2 =AB^2}$

Il **Teorema di Pitagora**, a parole, si enuncia così: "<u>In un triangolo rettangolo</u>, il quadrato costruito sull'ipotenusa è *equivalente* alla somma dei quadrati costruiti sui cateti".

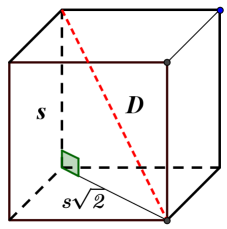
Utilizzando la **relazione** stabilita fra i lati di un triangolo rettangolo dal Teorema di Pitagora (l'ipotenusa ***i***, il cateto minore ***c*** e il cateto maggiore ***C***), $i^2 = c^2 + C^2$**,** se conosci due dei lati del triangolo, puoi trovare anche il terzo:

$$i = \sqrt{c^2 + C^2} \qquad c^2 = i^2 - C^2 \Rightarrow c = \sqrt{i^2 - C^2} \qquad C^2 = i^2 - c^2 \Rightarrow C = \sqrt{i^2 - c^2}$$

ES1 Se un cateto misura 3 e l'altro misura 4: $i = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. I numeri naturali che – come 3, 4 e 5 – sono legati dalla relazione di Pitagora si chiamano terne pitagoriche. La relazione vale anche per multipli di 3, 4 e 5. Per esempio se l'ipotenusa misura 10 e un cateto misura 6: $C = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$



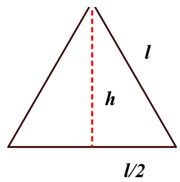
ES3 Mediante il Teorema di Pitagora scopriamo la **relazione** tra misura del **lato** di un **quadrato** (***l***) e **misura** della **diagonale** ***(d)*** del **quadrato**: $d = l\cdot\sqrt{2}$



ES4 Mediante il Teorema di Pitagora scopriamo la **relazione** tra misura dello **spigolo** di un **cubo** (***s***) e misura della **diagonale** (***D***) del **cubo**: $D = s\cdot\sqrt{3}$.

ES4 Mediante il Teorema di Pitagora scopriamo la **relazione** tra misura del **lato** di un **triangolo equilatero** (***l***) e misura dell'**altezza** del **triangolo**:

$$h = \frac{l}{2}\cdot\sqrt{3}$$



Il secondo Teorema di Euclide

Scrivendo e sviluppando la proporzione: AH **:** HC = HC **:** HB ("Nel *triangolo piccolo* la misura del cateto piccolo STA alla misura del cateto grande COME, nel *triangolo grande*, la misura del cateto piccolo STA alla misura del cateto grande) si ottiene il **II Teorema di Euclide**: $\mathbf{HC^2=AH\cdot HB}$.

il **II Teorema di Euclide** a parole si enuncia così: "In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le *proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stessa*."

Grazie ai due Teoremi di Euclide e al Teorema di Pitagora, puoi risolvere quasi tutti **problemi** che riguardano i **triangoli rettangoli**.