Relazioni

In matematica si chiama **relazione** fra due *insiemi* una **legge** che collega elementi del primo insieme a elementi del secondo insieme.

ES Se prendiamo l'insieme delle **persone** e l'insieme dei **cani**, è una relazione: "essere padrone di…". Ogni persona che possiede un cane è "collegato" al proprio cane.

Quando i due insiemi contengono numeri (o **grandezze**, cioè numeri con un'**unità** di **misura**) i tipi di relazione che si studiano sono meno fantasiosi e, in genere, sono espressi mediante formule **matematiche** e mediante grafici.

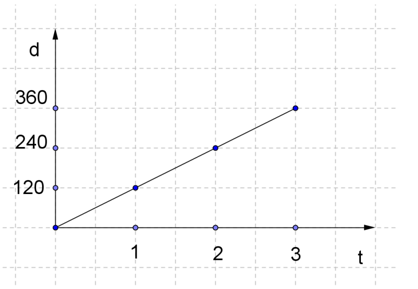
Relazione di proporzionalità diretta, quadratica e inversa

Un'automobile procede lungo un'autostrada. Supponi di poter misurare la distanza che percorre (misurata in chilometri) e il tempo impiegato a percorrerla (in ore). In tabella i risultati delle tue misure. Ogni distanza è *in relazione* con il tempo impiegato a percorrerla.

d (km)	120	240	360
t (h)	1	2	3
v (km/h)	120	120	120

Nella terza riga il **rapporto** tra ciascuna distanza e il tempo corrispondente. Come puoi vedere, questo rapporto è costante e vale 120 km/h Cioè: $\boldsymbol{d/t}$ = 120 km/h (è indacato con la lettera $\boldsymbol{v}$ perché corrisponde alla velocità media).

Una *relazione* fra numeri in cui il **rapporto** tra tali numeri è **costante**, si chiama: relazione di **proporzionalità diretta**.



Si può anche dire che le **grandezze** legate da questa relazione sono **direttamente proporzionali**.

Se rappresentiamo in un **grafico** valori legati da questo tipo di relazione otteniamo una *retta* passante per **O**.

N.B. E' un errore GRAVE dire che due insiemi di grandezze sono direttamente proporzionali perché "crescono tutt'e due" oppure "quelle del primo insieme crescono e anche quelle del secondo".

Potresti avere infatti insiemi di valori che "crescono insieme" ma in modo differente da quello della proporzionalità diretta. Per esempio guarda in tabella:

d (km)	10	40	90
t (h)	1	2	3
v (km/h)	10	20	30
a (km/h^2)	10	10	10

I valori "crescono insieme" ma questa volta non è costante il loro **rapporto** (terza riga), ma il rapporto tra i valori della prima riga e i quadrati dei valori della seconda. Quando succede questo si parla di relazione di: **proporzionalità quadratica.** Il grafico della proporzionalità quadratica è un ramo di **parabola**.

Per descrivere grandezze **direttamente proporzionali** invece, un altro modo corretto di indicarle è: "raddoppiando o triplicando le grandezze del primo insieme, raddoppiano o triplicano le grandezze del secondo".

Insiemi di grandezze il cui **prodotto** è costante, si dicono invece **inversamente proporzionali** e il grafico che le rappresenta è un ramo d'iperbole.

Sono per **esempio** inversamente proporzionali base e altezza di <u>rettangoli con stessa area</u>. Perché il prodotto di due insiemi di grandezze resti costante deve succedere che se raddoppia la grandezza del primo insieme, deve dimezzarsi la grandezza corrispondente.

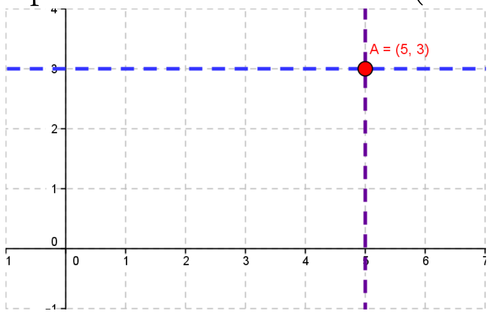
Rette nel piano cartesiano

Punti nel piano cartesiano

In geometria analitica un **punto** corrisponde a una ***coppia ordinata***[1] di numeri: le **coordinate**. ES **A**(5;3)

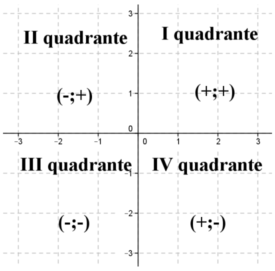
Il primo numero della coppia si chiama **ascissa** e si "prende" sull'asse orizzontale (asse delle ascisse o delle x. In breve: ***adx***).

Il secondo numero della coppia si chiama **ordinata** e "si prende" sull'asse verticale (asse delle ordinate, delle y. In breve: ***ady***).



A partire dalle **coordinate** si tracciano rette perpendicolari agli assi (proiettanti), la cui intersezione corrisponde al punto considerato.

A partire da un **punto** del piano si tracciano rette perpendicolari agli assi (proiettanti). Ciascuna intersezione con gli assi (proiezione) rappresenta una coordinata (secondo quanto detto sopra) del punto.



Nel piano cartesiano, si distinguono **quattro quadranti**, che si numerano in verso antiorario. I punti del **I quadrante** hanno ordinate entrambe positive, i punti del **II quadrante** hanno ascissa negativa e ordinata positiva, i punti del **III quadrante** hanno entrambe le coordinate negative e i punti del **IV quadrante** hanno ascissa positiva e ordinata negativa. Tutto questo è schematizzato nella figura a fianco.

Introduzione alle equazioni di rette nel piano cartesiano

La *relazione*[2] fra le coordinate dei punti di una retta, viene scritta mediante un'uguaglianza nella quale compaiono ***numeri*** e ***incognite***[3], è un'**equazione**.

- il simbolo per l'ascissa è la ***x***, il simbolo per l'ordinata è la ***y***

- in una retta ci sono infiniti punti e perciò infinite coppie di numeri che sostituiti, il primo alla ***x*** e il secondo alla ***y***, rendono **vera** l'uguaglianza (sono soluzioni dell'equazione)

- tutte e sole le **soluzioni** dell'equazione di una retta sono *coordinate* di **punti** della retta[4]

---

[1] L'**ordine** in cui sono scritti i numeri è fondamentale: cambiando l'ordine cambia il punto.

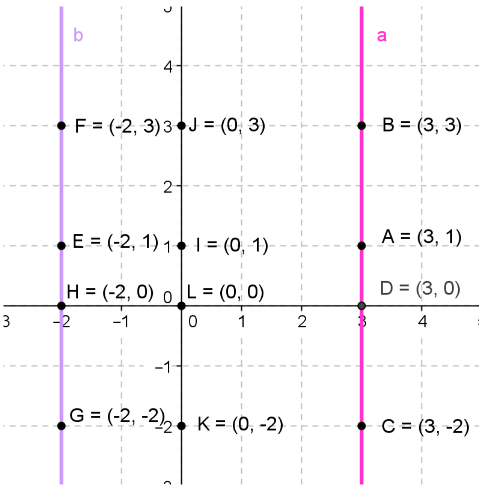
[2] In matematica si chiama *relazione* fra *insiemi* di cose (in genere insiemi di numeri) una **legge** che collega gli elementi dei due insiemi. Abbiamo studiato le rette proprio per studiare il *tipo* di relazione che collega le coordinate dei punti di una retta: la **relazione lineare**. E alcuni casi particolari: la **relazione costante** (retta parallela all'*adx*) e la **relazione** di **proporzionalità diretta** (retta passante per O).

[3] Le **incognite** presenti nell'equazione di una retta, però, non rappresentano "cose trovare", com'era nelle equazioni di primo grado, ma ascissa e ordinata di un **punto generico** della retta. Vengono chiamate, per questo: **variabili**. Capirai meglio con gli esempi. Spero.

[4] Cioè: **se** un punto sta su una retta, **allora** le sue coordinate sono soluzione dell'equazione della retta; **se** un punto non sta su una retta, **allora** le sue coordinate non possono essere soluzione dell'equazione della retta. Sembra una sciocchezza ma ha conseguenze importanti.

Per scrivere che una *certa retta* ha una *certa equazione*, si utilizza questa *convenzione*: si scrive il *nome della retta* (una lettera fra le ultime dell'alfabeto, o la lettera **r** con un **pedice** che indichi due punti della retta), poi " **:** " e poi si scrive l'equazione.

Equazione di una retta parallela all'ady



I **punti** di ciascuna retta parallela all'*ady*, come quelle in figura e come l'*ady* stesso, hanno tutti **ascissa** uguale a uno stesso numero.

I punti della retta ***a*** hanno tutti ascissa uguale a 3

➔ ***a*** **:** $x = 3$

I punti dell'*ady* hanno tutti ascissa uguale a 0

➔ *ady* **:** $x = 0$

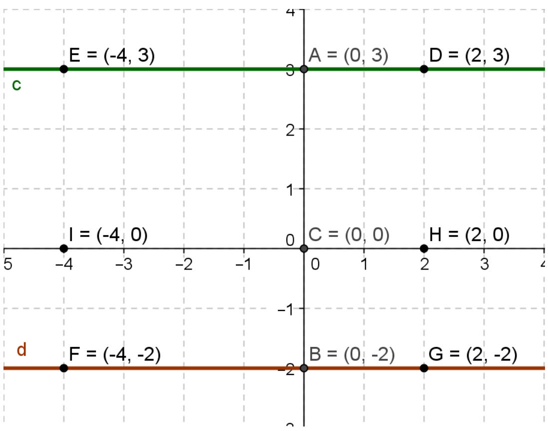
I punti della retta ***b*** hanno tutti ascissa uguale a -2

➔ ***b*** **:** $x = -2$

Le rette **parallele all'*ady***, compreso l'*ady* stesso, hanno tutte un'equazione rappresentativa che ha la stessa forma: $x = t$. In simboli:

r // *ady* sse (opp ⇔) ***r***: $x = t$, con $t \in \Re$ *(si legge: "**t** è un numero reale")*

Equazione di una retta parallela all'adx



I **punti** di ciascuna retta parallela all'*adx*, come quelle in figura e come l'*adx* stesso, hanno tutti **ordinata** uguale a uno stesso numero.

I punti della retta ***c*** hanno tutti ordinata 3

➔ ***c*** **:** $y = 3$

I punti dell'*ady* hanno tutti ordinata 0

➔ *adx* **:** $y = 0$

I punti della retta ***d*** hanno tutti ordinata -2

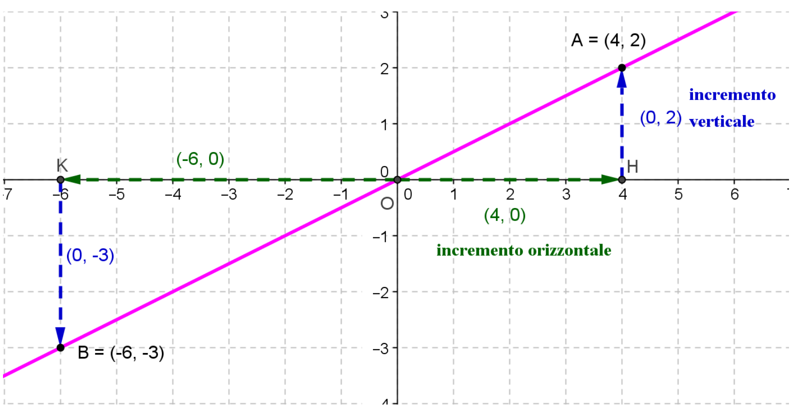
➔ ***d*** **:** $y = -2$

Le rette **parallele** all'***adx***, compreso l'*adx* stesso, hanno tutte un'equazione rappresentativa che ha la stessa forma: $y = b$. In simboli:

r // *adx* sse (opp ⇔) ***r***: $y = q$, con $q \in \Re$ *(si legge: "**q** è un numero reale")*

Equazione di una retta passante per l'origine. Pendenza di una retta.

- Guardando la retta in figura – passante per **O**(0;0) e per **A**(4;2) – immagina di poter *muovere* un punto **P**(x;y) lungo tale retta. Mentre **P** si muove la sua *ascissa* x e la sua *ordinata* y cambiano continuamente ma **P** non disegna nessuna *variazione di inclinazione*. Cioè la retta ha **pendenza** costante.



- Cioè il **rapporto** tra **incremento verticale** (numeratore) e **incremento orizzontale** (denominatore) è costante: qualunque punto si prenda sulla retta – anche nel **III quadrante** – e tale rapporto risulta, per la retta nein figura, ½; come puoi vedere!

- Si vede anche dal disegno come questa **pendenza** corrisponde al rapporto fra ordinata e ascissa di un *qualunque punto*. In linguaggio matematico sarà dunque: $\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$.

- E, ricordando come si *opera* in un'equazione: $y=\frac{1}{2}\cdot x$ che è l'**equazione della retta.**

Rivediamo il ragionamento che porta a scrivere l'equazione di una retta passante per O:

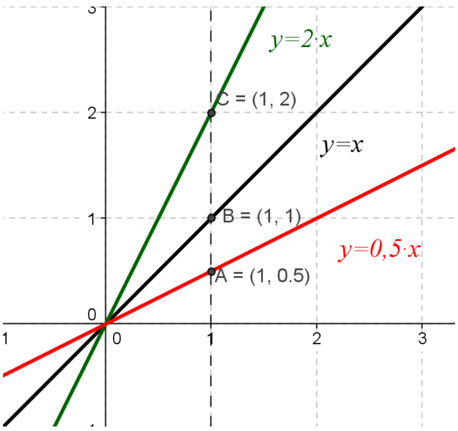
1) definiamo la pendenza "***m***" di una retta passante per **O**: $m=\frac{\text{incremento verticale}}{\text{incremento orizzontale}}$

2) osserviamo come la pendenza, per rette passanti per **O** che non siano l'*ady*, si trovi facendo il rapporto fra ordinata e ascissa di un punto qualunque della retta.

3) Scriviamo il punto (2) in formula, per la retta passante per **O** e **A**(4;2): $\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$

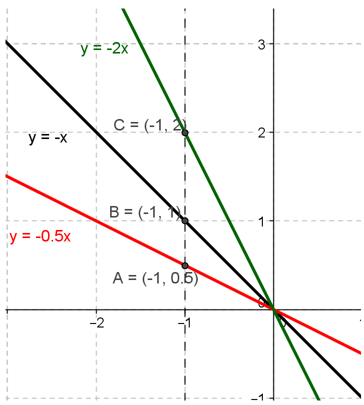
4) Esplicitiamo la y e scriviamo l'**equazione** della retta per O e A: $r_{OA}: y=\frac{1}{2}\cdot x$

Equazione **generica** di una retta passante per O (*ady* escluso[5])
Una retta che passa per **O** avrà *quasi* sempre (*ady* escluso) **equazione** del tipo: $y = m\cdot x$ ($m = y/x$) con $m \in \Re$



Al *crescere* della pendenza, cresce l'*inclinazione* della retta. La retta di equazione *y=x* (la **bisettrice** di I e III quadrante), che ha pendenza 1, costituisce uno *spartiacque* fra le rette di pendenza maggiore e le rette di pendenza minore di 1.

In figura ti ho segnato le coordinate di alcuni punti con ascissa 1, perché ti fosse facile controllare il valore della pendenza e quindi l'equazione della retta corrispondente.

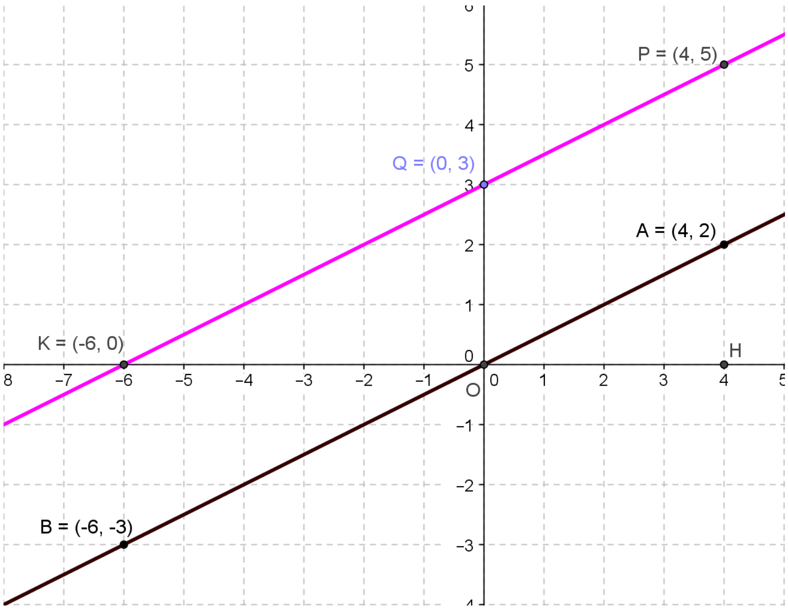


Ma la pendenza è per forza un numero positivo? NO. Se gli incrementi (verticale e orizzontale) hanno segno discorde la pendenza della retta sarà negativa. Ma gli incrementi abbiamo visto che coincidono con le coordinate dei punti della retta, se questa passa per O. E gli unici punti ad avere coordinate discordi sono quelli del **II** e **IV** quadrante.

La retta di equazione $y = -x$ (la **bisettrice** di II e IV quadrante) ha pendenza – 1. Come l'altra bisettrice è uno *spartiacque*...

[5] Preso un qualunque punto sull'*ady*, l'**incremento orizzontale** è 0. Nel calcolo della **pendenza** lo 0 sta al *denominatore* e una frazione con denominatore 0 non ha senso!

Equazione di una retta non passante per O e non parallela all'ady



Se osservi la *rappresentazione grafica* della retta r_{PQ}, parallela alla retta r_{OA} e passante per il punto **Q**(0;3), potresti scrivere subito l'equazione di questa retta r_{PQ}!

Se r_{OA} r_{PQ} sono **parallele**, infatti, avranno **stessa inclinazione** e perciò **stessa pendenza**. Questa retta r_{PQ} puoi pensare di ottenerla aggiungendo alle **ordinate** di ciascun punto di r_{OA} +3 (te ne accorgi guardando **Q**(0;3), ma anche **P**(4;5) e **K**(-6;0).

Sarà pertanto: $r_{PQ} : y = \frac{1}{2} \cdot x + 3$

Equazione **generica** di una retta NON passante per **O** (e NON parallela all'*ady*)
In generale, d*isegnata sul piano cartesiano una retta* ***r*** *con* pendenza ***m*** e intersezione con l'asse delle *y* in **Q**(0;***q***), ***r*** avrà equazione: $y = mx + q$

- Nell'equazione precedente si possono trovare, come *casi particolari* anche *alcune* delle equazioni incontrate precedentemente. Si ha infatti che:

- Per le rette che passano per **O**(0;0) si ha che $q = 0$ perciò l'equazione diventa: $y = mx$
- Per l'asse delle x si ha anche $m = 0$, perciò l'equazione diventa: $y=0$
- Per le rette parallele all'asse delle x, che incontrano l'asse delle y in **Q**(0;**q**), la pendenza è sempre $m = 0$ Dunque l'equazione diventa: $y=q$

N.B. Le equazioni $x = a$ non sono casi particolari della $y = mx + q$. Per le rette di questo tipo infatti, si presenta la *stessa situazione dell'asse delle y*: non è possibile calcolarne la pendenza e perciò l'equazione non si può ottenere dalla $y = mx + q$.

Si ottiene invece la loro equazione osservando direttamente che tutti i punti di ciascuna di queste rette hanno la stessa ascissa.

L'equazione di una retta nel piano cartesiano si presenta in una delle forme seguenti: $y = m \cdot x + q$ opp $x = a$

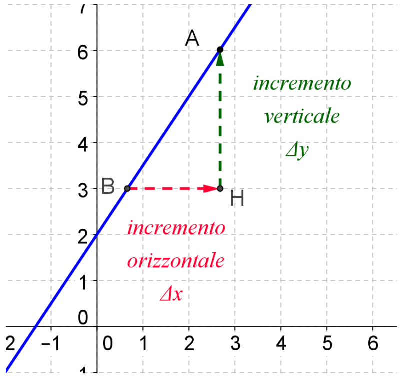
Pendenza di una retta non passante per O (LAB INF: Geogebra)

Se una retta passa per **O**, la sua pendenza è data dal **rapporto** fra ***ordinata*** (y) e ***ascissa*** (x) di *uno qualunque dei suoi punti.*

Se una retta NON passa per **O**, la sua pendenza non è più data dal rapporto fra ordinata e ascissa di uno qualunque dei suoi punti, ma dal rapporto fra l'*incremento* delle *ordinate* di **due** suoi punti e l'*incremento* delle *ascisse* corrispondenti .

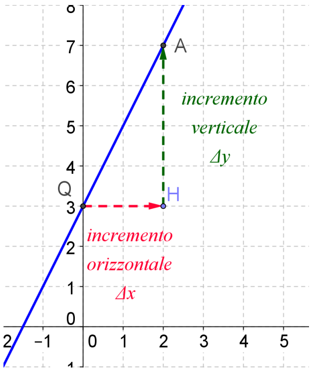
Cioè. Data una retta r_{AB}, passante per i punti **A**(x_A;y_A) e **B**(x_B;y_B), la pendenza di

$\boldsymbol{r_{AB}}$ si può indicare con $\boldsymbol{m_{AB}}$ e si ottiene così:



$$m_{AB} = \frac{\overrightarrow{AH}}{\overrightarrow{BH}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Se uno dei due punti è il punto di scissa 0: **Q**(0;***q***)



$m_{QA} = \frac{y_A - q}{x_A - 0} = \frac{y_A - q}{x_A}$. Più semplice...

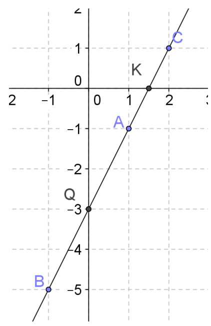
<u>Avendo il grafico di una retta</u>, il modo più semplice di ricavarne la pendenza è determinare gli incrementi fra il punto **Q**, di ascissa 0 (intersezione con l'*ady*) e un punto qualunque.

N.B. Conoscendo la pendenza ***m*** di una retta ***r***, e l'ordinata ***q*** del punto **Q** d'intersezione di ***r*** con l'*ady*, l'equazione della retta è determinata ***r*** : $y = \boldsymbol{m} \cdot x + \boldsymbol{q}$.

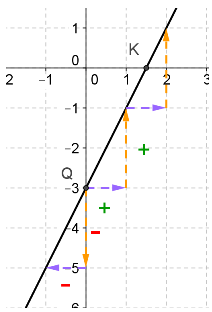
<u>*Dall'equazione di una retta al suo grafico*</u>

EX Data la retta, ***t:*** $y = 2x - 3$, come si fa a disegnarla? Puoi scegliere tra due metodi:

1) Metodo della tabella. (Più semplice da capire, presenta però il problema dei ***conti***. Specialmente se c'è da lavorare con frazioni).



x (valori scelti a caso)	*0*	*1*	*-1*	*2*
y = 2 x – 3	2·*0* – 3=3	2·*1* – 3= – 1	2·(*-1*) – 3= – 5	2·*2* – 3=1
Nome sul disegno	Q	A	B	C



2) Metodo della scaletta. (Complicato da spiegare, è semplicissimo da utilizzare, una volta compreso, e permette di evitare i **conti**!). Si "parte" dal punto d'intersezione con l'*ady* **Q**(0; –3) e si applica il concetto di pendenza. La pendenza della retta ***t*** è 2. Avendo definito la pendenza come rapporto tra due numeri, può essere comodo scrivere $2 = \frac{2}{1} = \frac{\textit{incremento verticale}}{\textit{incremento orizzontale}} = \frac{-2}{-1}$. A partire da **Q** puoi: ***o*** "andare a destra" di 1 (*incremento orizzontale* = +1) e "andare verso l'alto" di 2 (*incremento verticale* = +2), ***o*** "andare a sinistra" di 1 (*incremento orizzontale* = –1) e "andare in basso" di 2 (*incremento verticale* = –2). Unendo le <u>punte delle frecce che indicano l'incremento verticale</u> avrai un disegno della retta molto preciso.

> **N.B.:** Per disegnare correttamente una retta devi determinare il **punto d'intersezione con** l'***adx***. Poiché questo punto ha **ordinata 0** (come TUTTI i punti sull'*adx*), per determinarlo DEVI sostituire al posto di ***y*** nell'equazione della retta $y = 2x - 3$ il valore 0. Ottieni così un'equazione in x : $2x - 3 = 0$ la cui soluzione, $x = \frac{3}{2}$, è l'ascissa del punto cercato (l'ordinata ce l'hai già: è 0!). Guarda sul disegno se "ti torna"...

<u>*Equazione di una retta passante per un punto e di pendenza (m) data*</u>

EX1 Scrivi l'equazione della retta di pendenza 3 e passante per il punto **A**(-1;-4)

Si tratta di una retta con equazione del tipo: $y = \boldsymbol{m} \cdot x + \boldsymbol{q}$. Scrivere l'equazione significa sostituire le lettere $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{q}$ con dei numeri.

Puoi cominciare a scrivere l'equazione della retta sostituendo al posto delle lettera $\boldsymbol{m}$ il numero 3. Avrai così: $y=\mathbf{3}x+\boldsymbol{q}$.

Sostituendo le coordinate di **A** al posto "giusto" (-1 dov'è scritto $\boldsymbol{x}$ e -4 dov'è scritto $\boldsymbol{y}$) avrai un'*equazione lineare* in una sola incognita, in $\boldsymbol{q}$ e cioè: $-4=3(-1)+\boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{q}-3=-4$ (per la simmetria dell'uguaglianza) e infine: $\boldsymbol{q}=-1$. Cioè $\boldsymbol{r_A}$: $y=3x-1$.

Disegna la retta e poi inventa altri esercizi simili (anche con pendenza negativa e frazionaria)

<u>Equazione di una retta passante per un punto e di intercetta (q) data</u>

EX2 Scrivi l'equazione della retta passante per i punti **A**(-1;-4) e **Q**(0;-1)

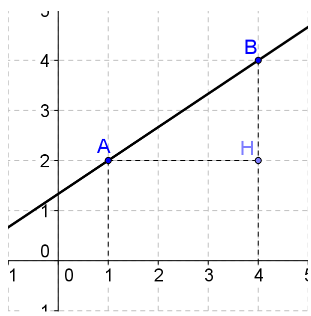
Puoi cominciare a scrivere l'equazione della retta sostituendo al posto delle lettera $\boldsymbol{q}$ il numero -1 Avrai così: $y=\mathbf{m}x-1$.

Sostituendo le coordinate di **A** al posto "giusto" avrai questa volta un'equazione in $\boldsymbol{m}$ e cioè: $-4=\boldsymbol{m}(-1)\boldsymbol{-1} \Rightarrow -\boldsymbol{m}-1=-4$ (per la simmetria dell'uguaglianza) e infine: $\boldsymbol{m}=3$. Of course!

<u>Equazione di una retta passante per due punti</u>

EX "Dati i due punti **A**$(x_A;y_A)$ e **B**$(x_B;y_B)$".

EX3 Dati i punti **A**(1;2) e **B**(4;4) disegna la retta passante per **A** e **B** (r_{AB}) e *scrivine l'equazione rappresentativa.*



Innanzitutto puoi osservare che r_{AB} <u>non</u> è parallela agli assi cartesiani e non passa per **O**, quindi la sua equazione sarà del tipo: $y=\boldsymbol{m}x+\boldsymbol{q}$.

x e y sono due **variabili** che indicano le *coordinate di un generico punto che si muove lungo la retta*. <u>Scrivere l'equazione di r_{AB}</u> significa dunque attribuire <u>un valore numerico *determinato* ai **parametri** $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{q}$.</u> Per far questo devi trovare la pendenza e poi determinare q nel modo mostrato poco sopra.

Per trovare la pendenza disegna **A** e **B** sul piano cartesiano e proiettali su *adx* e *ady*.

Indica con **H** il punto d'intersezione fra: proiezione di **B** su *adx* e prolungamento della proiezione di **A** sull'*ady*. Viene così a formarsi un triangolo rettangolo: **AHB**, retto in **H**.

Osservando questo triangolo e ricordando quel che abbiamo detto della pendenza di una retta, secondo te, come si trova la pendenza di r_{AB}? $m_{AB}=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Ora che hai m_{AB} Puoi scrivere l'equazione della retta così: $y=m_{AB}x+\boldsymbol{q}$

Devi trovare $\boldsymbol{q}$: ti trovi nell'esercizio precedente $y_A=m_{AB}\ x_A+\boldsymbol{q}$ quindi: $\boldsymbol{q}=y_A-m_{AB}\cdot x_A$. Ovviamente avresti avuto lo stesso risultato sostituendo le coordinate di B.

Inventa coppie di punti e scrivi l'equazione rappresentativa della retta passanet per ciascuna coppia!