NOME E COGNOME, CLASSE, DATA____

1 *Equazione* di una retta parallela a uno degli assi cartesiani

- Rappresenta su di un piano cartesiano i seguenti punti: **P**(-3;-4) **Q**(-3;0) **R**(-3;1) **S**(-3;2).

Qual è la *caratteristica comune ai punti* P, Q, R e S? ………………………………………

Unendo i punti P, Q, R, S, e p*rolungando* **RS** *verso l'alto* e **PQ** *verso il basso* all'*infinito*, cosa otterresti? ....…....Osserva la posizione di tale *retta* rispetto a ciascuno degli assi cartesiani. E' ………………….…… all'*asse delle x* e …..…………………… *all'asse delle y.*

- Scrivi in *forma sintetica* (linguaggio matematico) la **caratteristica** comune a **tutti** e **soli i punti** [1] appartenenti alla *retta* PQRS ……………………………………………

<u>Questa *scrittura sintetica* si chiama **equazione rappresentativa della retta** PQRS</u>

- Disegna rette **parallele** alla retta PQRS. Scegliendo punti a caso su ciascuna di queste rette, che caratteristica comune hanno le coordinate dei punti di ciascuna retta? ……………………………………………...

- Rappresenta sullo stesso piano cartesiano i punti: **A**(0;-4) **B**(0;0) **C**(0;1) **D**(0;2).

Cosa osservi? ………………………………………………………………………..

Che ***relazione*** c'è fra la retta ABCD e la retta PQRS? ……………………………………

- Scrivi *l'equazione rappresentativa* della retta ABCD: ..……………………………………

E' possibile, scrivere un'equazione rappresentativa di tutte le rette parallele alla retta PQRS, compresa la retta ABCD. Prova a scriverla ……………………………………………

Rappresenta su di un piano cartesiano i seguenti punti: **P'**(-3;3) **Q'**(1;3) **R'(**2;3) **S'**(4;3) .

Qual è la *caratteristica comune ai punti* P',Q', R' e S'? ………………………………………

Scrivi l'equazione rappresentativa della retta **P'Q'R'S'**: …………………………………

- Osserva la posizione di tale *retta* rispetto a ciascuno degli assi cartesiani. E' …………………….……… all'*asse delle x* e …..………………………… all'*asse delle y.*

- Disegna rette **parallele** alla retta P'Q'R'S'. Scegliendo punti a caso su ciascuna di queste rette, che caratteristica comune hanno le coordinate dei punti di ciascuna retta? ……………………………………………...

Rappresenta sullo stesso piano cartesiano i punti: **A'**(2;0) **B'**(-4;0) **C'**(0;0) **D'**(1;0).

Cosa osservi? ………………………………………………………………………..

- Scrivi *l'equazione rappresentativa* della retta A'B'C'D': ……………………………………

Le rette parallele alla retta P'Q'R'S', compresa la retta A'B'C'D', hanno tutte un'equazione rappresentativa che ha la stessa **forma**. Prova a scrivere tale equazione.

………………………………………………………………………………………….

Trai le tue conlcusioni:

[1] Comune alle coordinate di tali punti

NOME E COGNOME, CLASSE, DATA____

2 Retta passante per l'origine. Pendenza di una retta.

- A ogni punto del piano cartesiano corrisponde una coppia ordinata di numeri (e viceversa)
- A ogni *retta parallela a uno degli assi cartesiani* corrisponde un'*equazione*
- L'**equazione** di **una retta** esprime *con una formula matematica* **la relazione fra le coordinate corrispondenti di *tutti*** *e* ***soli*** **i punti**[2] che *appartengono* a **quella retta**

Quando una <u>retta è parallela a uno degli assi</u> è semplice scriverne l'equazione perché la **relazione** esistente tra ***ordinate*** e ***ascisse*** è una **relazione costante**.

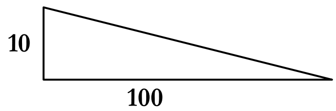
Se una **retta passa** per **O**, se hai la *tabella di valori* - ma anche solo due punti - è abbastanza facile scriverne l'equazione. Ma ci serve introdurre il concetto di **PENDENZA**. Capirai...

- Disegna sul foglio la retta ***r*** passante per **O**(0;0) e per **A**(2;4). Immagina di poter *muovere* un punto **P**, di coordinate (*x;y*), lungo tale retta. Mentre **P** si muove, l'*ascissa x* e l' *ordinata y* cambiano continuamente; eppure c'è qualcosa che resta costante: nel suo moto **P** non *curva mai*. Segue cioè una *pendenza* costante. La **pendenza** della retta non varia mai.

Il concetto di **pendenza** è comunemente riferito a **strade** (cfr cartelli stradali): si ha:

$$pendenza = \frac{incremento\ verticale}{incremento\ orizzontale}$$

ES



$$\text{Pendenza} = \frac{10}{100} = 10\,\%$$

Che significa la parola **incremento**? ....

Essendo la pendenza della retta ***r*** <u>*costante*</u>, per conoscerla basterà aver percorso **OA**.

Che *incremento verticale* c'è tra i punti **O** e **A**? .... Che *incremento orizzontale* c'è tra i punti **O** e **A**? .... La **pendenza** della retta ***r***, in definitiva è data dal rapporto fra le .... e le .... di un qualunque punto **P** di ***r*** e vale: …………. In una formula: ....

P(*x;y*) percorre la retta ***r se e solo*** se risulta *y* = …….. Quest'ultima è proprio l'**equazione esplicita** (*y* al <u>primo membro</u> e tutto il resto al <u>secondo</u>) **della retta *r***

- La retta **r** <u>non è la sola che passa per **O**</u>. Disegna la retta **s** che passa per **B**(2;3) e la retta **t** che passa per **C**(2;1). Trova la pendenza e scrivi l'equazione di **s** e **t**. Cosa osservi?

Pendenza ***s*** = …… Equazione ***s*** : y = ……;   Pendenza ***t*** = …… Equazione ***t*** : y = ……

Ora disegna la retta ***q*** che passa per **O** e **R**(2;-4). Cosa osservi? ……………..........................
La **pendenza** della retta ***q*** varrà: …… Equazione di ***q*** : y = ……

Si può arrivare a conclusioni carattere generali: una retta che passa per **O** avrà *quasi* sempre un'equazione del tipo : $y = m \cdot x$ (ricorda: $m = y/x$).

Le lettere **x**, ***y*** e ***m*** che compaiono nell'equazione hanno il seguente significato:

- *x* e *y* (si chiamano: **VARIABILI)** sono *ascissa e ordinata di un punto* ***P*** *che percorre la retta*
- ***m*** (è un ***parametro***: indica il posto di un numero) è la **pendenza della retta**.
- Dell'asse delle *y* non si può dare la pendenza perché: ....……………

L'asse delle x ha pendenza che vale: …………. perché: ……………………………….

EX1 Disegna le rette passanti per **O** e per **A**(2;2) e per **O** e per **B**(-2;-2) e scrivine le equazioni.

[2] Cioè: **tutti** i punti le cui coordinate verificano *l'equazione rappresentativa della stessa* sono punti della retta e, viceversa, **solo** i punti della retta hanno coordinate che verificano *l'equazione rappresentativa della stessa*

NOME E COGNOME, CLASSE, DATA____

3 Equazione di una retta nel piano cartesiano

- Disegna, in un riferimento cartesiano Oxy *opportuno*, la retta ***r*** della scheda **2**, passante per **O**(0;0) e per **A**(2;4), e la retta **r'** passante per i punti **B**(0;3) e **A'**(2;7).

L'equazione di ***r*** è: $y = 2x$. Vediamo come si può arrivare a scrivere l'equazione di **r'**.

- Qual è la *relazione* fra le due rette? …………Perciò la pendenza di ***r'*** è: ....
- La retta **r'** è stata ottenuta aggiungendo ...... a ciascuna ordinata dei punti della retta ***r***.
- Se un punto **P** di ***r*** ha coordinate: $(x\ ;\ 2x)$ – perché **r** : $y = 2 \cdot x$ può essere letto anche così: i punti della retta **r** hanno ordinate che sono sono il doppio delle ascisse – da quello che hai scritto alla riga precedente un punto **P**' di **r'** ha coordinate: (x ; …...).

Perciò l'equazione della retta ***r'*** è: ....

La retta **r'** ha pendenza ……; interseca l'asse delle y in **B**(0;3); ha equazione : $y = 2x+3$

Una retta ***r''***, parallela a ***r*** e passante per il punto (0; -3) è una retta che: ha pendenza …………; interseca l'asse delle y in …………; ha equazione: $y =$ ………………

Gli esempi precedenti suggeriscono che: se *una retta **r** ha* pendenza ***m*** e intersezione con l'asse delle y in **Q**(0;***q***), allora la retta ***r*** ha equazione: ………………………………………

- Dall'equazione precedente si possono trovare, come casi particolari anche *alcune* delle equazioni incontrate nelle schede **1** e **2**. Si ha infatti che:

- Per le rette che passano per **O**(0;0) si ha che ***q*** = ….. perciò l'equazione diventa: ……
- Per l'asse delle x si ha anche ***m*** = ……, perciò l'equazione diventa: …………………
- Per le rette parallele all'asse delle x, che incontrano l'asse delle y in **Q**(0;**q**), la pendenza è sempre ***m*** = ………… Dunque l'equazione diventa: ………………………………

N.B. Le equazioni $\boldsymbol{x = a}$ non sono casi particolari della $\boldsymbol{y = mx + q}$. Per le rette di questo tipo infatti, parallele all'*asse delle y*: non è possibile calcolarne la pendenza e perciò l'equazione non si può ottenere dalla $\boldsymbol{y = mx + q}$. Si ottiene invece la loro equazione osservando direttamente che tutti i punti che le compongono hanno la stessa ascissa.

L'equazione di una retta nel piano cartesiano si presenta in una delle forme seguenti:

$$\boldsymbol{y = mx + q} \qquad \text{opp} \qquad \boldsymbol{x = a}$$

EX2 Disegna ***r₁***: $x = -\frac{3}{5}$; ***r₂***: $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{5}$. Per disegnare $\mathbf{r_2}$ usa la tabella:

x	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{5}$			

- L'ordinata del punto di $\mathbf{r_2}$ avente ascissa $\frac{21}{10}$ quanto vale? ……

Ricapitoliamo: siamo partiti dal definire una **relazione** fra gli elementi di due insiemi come una *legge* che collega *alcuni* elementi del primo insieme con *alcuni* elementi del secondo. Abbiamo introdotto le **rette** come rappresentazione grafica di alcune relazioni: la relazione **costante** (rette parallele all'*adx*), la **proporzionalità diretta** (rette passanti per O) e la ***relazione lineare*** (rette non passanti per O). Hai poi trovato la parola *relazione* utilizzata più volte in queste pagine, con significati leggermente differenti da quello della definizione. Spero che questo non ti abbia confuso. Concludiamo la trattazione astratta sulle rette e poi torniamo alle relazioni, e a problemi inerenti relazioni fra grandezze.

NOME E COGNOME, CLASSE, DATA____

4 Dall'equazione di una retta al suo grafico

Vediamo ora come utilizzare le informazioni acquisite per risolvere alcuni **esercizi**. Per esempio:**EX3** "Data l'equazione della retta **r** : $y = 3x + 5$ *disegna* il grafico corrispondente."

Come procederesti? Ci sono vari modi. Prova prima da sol* e poi confronta il tuo metodo con quelli che ti propongo:

Metodo della tabella

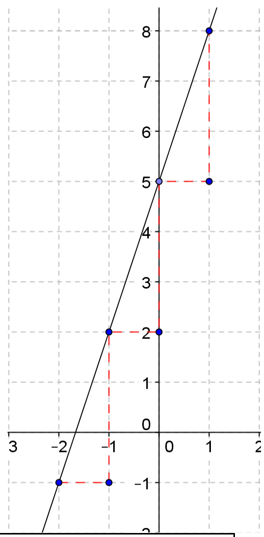
Scrivo valori *arbitrari* per le **x** e poi calcolo i valori corrispondenti per le **y** (completa).

x	0	1/3	-1/3	**-5/3**	-2	1	-1
$y = 3 \cdot x + 5$	5						

Ho scelto questi valori cercando di prevedere quali potessero darmi risultati interessanti e, a un tempo, mi consentissero di fare poca fatica con i conti. Osserva il risultato corrispondente al numero in **grassetto**. Che ne pensi? ....

Poi si tratta di posizionare correttamente questi punti sul piano cartesiano e unirli. Visto che ci sono molte frazioni con denominatore 3, ti conviene utilizzare un **multiplo** di **3** come ***u.d.m.***, non trovi? Attent* a *posizionare* in maniera comoda il piano cartesiano all'interno del tuo foglio (guarda i valori delle ordinate quanto sono grandi!).

Metodo della pendenza (o della scaletta)



Partendo dal punto chè il più facile determinare, e cioè (0,5) puoi osservare come "pendenza 3" significhi che per ogni *incremento orizzontale* di 1 quadretto, c'è un *incremento verticale* di 3 quadretti (3/1=3).Ti mostro la cosa con un disegno, altrimenti è troppo difficile! →

Unendo poi gli "spigoli dei gradini" della *scaletta*, avrai la tua retta.

Questo metodo sembra molto astratto ma è l'unico che ti consente di fare un disegno veramente preciso e di essere in grado di operare in modi utili e interessanti sul tuo disegno.

Si rivela indispensabile quando c'è da rappresentare rette **perpendicolari** fra loro. Cerca quindi di impegnarti a capire come funziona!

.**N.B.** Per disegnare correttamente una retta **r**: $y = \boldsymbol{m}x + \boldsymbol{q}$ di equazione *data* (cioè tale che, al posto dei ***parametri m*** e ***q*** ci siano dei numeri) è indispensabile trovarne **l'intersezione** con l'*adx* Come procederesti? ……………………...

Suggerimento: l'intersezione fra due rette è un **punto**. Ogni punto ha le *sue* coordinate.

Che **ordinata** avrà l'intersezione fra ***r*** e l'*adx*? ……. Rileggendo la *nota* della scheda **2** ti viene in mente come risolvere la faccenda? ……………………………………………

EX4 *Disegna* le rette di equazioni rappresentative (dai loro nomi progressivi: $r_1; r_2; etc.$):

$$y = 3x - 5\,;\; y = -3x + 5\,;\; y = -3x - 5\,;\; y = \frac{1}{3}x + 4\,;\; y = \frac{1}{3}x - 4\,;\; y = -\frac{1}{3}x + 4\,;\; y = -\frac{1}{3}x - 4$$

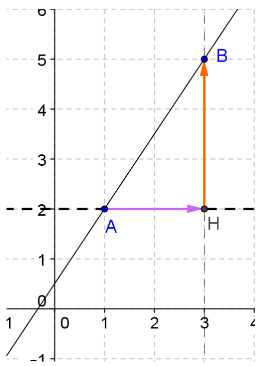
NOME E COGNOME, CLASSE, DATA____

5 Dal grafico di una retta (o quasi) all'equazione rappresentativa

EX5 "Dati i due punti **A**(1;2) e **B**(3;5) disegna la retta passante per **A** e **B** (r_{AB}) e *scrivine l'equazione rappresentativa*". Anche in questo caso si può procedere in due modi.

Innanzitutto puoi osservare che r_{AB} non è parallela a nessun asse cartesiano e non passa per **O**, quindi la sua equazione sarà del tipo: $y = \boldsymbol{m}x + \boldsymbol{q}$. x e y sono due **variabili** che indicano le *coordinate di un generico punto della retta*. Scrivere l'equazione di r_{AB} significa dunque attribuire un *valore numerico* determinato ai **parametri** $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{q}$.

I metodo (trova la pendenza e poi *imponi il passaggio per un punto* per trovare *q*)



Individua **A** e **B** sul piano cartesiano e *proietta* **B** su *adx* e **A** *ady*. Indica con **H** il punto d'intersezione fra le proiettanti. Viene così a formarsi un triangolo rettangolo: **AHB**, retto in **H**. Osserva questo triangolo e ricorda quel che abbiamo detto della pendenza di una retta. Osserva in particolare i vettori colorati, che indicano l'*incremento* e il suo *segno* (verso della freccia), secondo te, come si trova la pendenza di r_{AB}? Ora che hai m_{AB} = ……. Puoi scrivere una parte dell'equazione della retta: $y = \ldots \cdot x + \boldsymbol{q}$

Devi trovare $\boldsymbol{q}$. Sfrutta il fatto di conoscere le coordinate di due punti della retta (ne basterebbe uno, per questo passo) e la *nota della scheda 2*. Solo le coordinate dei punti di una retta, se sostituiti al posto di $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, rendono vera l'uguaglianza che fa parte dell'equazione. Prova: ………………………………….. Ora che hai anche il valore di **q**, puoi scrivere l'equazione di r_{AB}: ....

II metodo (*imponi il passaggio per i punti* e usa *i principi di equivalenza delle equazioni, ovvero: la FORMULA!!!*)

C'è un ragionamento un po' difficile e lungo, basasto sull'applicazione ripetuta dei principi di equivalenza delle equazioni, che porta a scrivere la seguente "formula" che consente di scrivere in pochi passaggi (se sai fare i conti enon li sbagli) l'equazione di una retta di cui si conoscano le coordinate di due punti. $\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A} = \dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}$

EX6 Utilizza la formula relativa alla retta passante per due punti per determinare l'equazione della retta passante per **A**(1;2) e **B**(3;5).

Soluzione dell'**EX6** (da guardare solo dopo aver tentato da sé!)

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{x-x_A}{x_B-x_A}. \Rightarrow \frac{y-2}{5-2} = \frac{x-1}{3-1} \qquad \frac{y-2}{3} = \frac{x-1}{2} \qquad y-2 = \frac{3}{2}\cdot(x-1) \qquad y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 2$$

E, infine, lo stesso risultato che avevi ottenuto con l'altro metodo: $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

C'è una **formula** anche per il caso in cui conosci la **pendenza** della retta e **un** suo **punto** **A**$(x_A;y_A)$ (se utilizzi il **metodo I**, dovresti sapere già che fare...): $y - y_A = m\cdot(x - x_A)$.

EX7 Inventa esercizi tu: inventa coppie di punti, o di punto e pendenza, facendo attenzione a posizionare i punti in tutti i quadranti e a utilizzare anche perndenze negative.