Problemi con le frazioni

Premessa importante: se devi trovare i 3/5 di 750 come fai? Molti di voi sono certa che procedono così: 750 : 5 = 150 ➔ 150·3 = 450

Osserviamo una cosa però: innanzitutto <u>nulla vieta di effettuare di fila le operazioni indicate</u> (con una parentesi, perché (750:5)·3≠750:(5·3). Verificalo).

Perciò: (750:5)·3. Ma osserva come (vedi anche il file su "frazioni e numeri decimali"): $750:5=\frac{750}{5}$ e quindi: $(750:5)\cdot 3 = \frac{750}{5}\cdot 3$. A questo punto scoprirai se davvero hai capito *come funziona* la **moltiplicazione di frazioni**. Ti è chiaro infatti che: $\frac{750}{5}\cdot 3 = 750\cdot\frac{3}{5}$?

In caso **negativo** ti ricordo che: $\frac{a}{b}\cdot\frac{h}{g}=\frac{a\cdot h}{b\cdot g}$, come tutte le **proprietà** espresse mediante **uguaglianza**, può essere letta anche <u>da destra verso sinistra.</u> Come si ha: $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$ (che abbiamo già visto), così si può avere: $a\cdot\frac{h}{g}=\frac{a\cdot h}{g}=\frac{a}{g}\cdot h=\frac{1}{g}\cdot a\cdot h$ (e, utilizzando la **proprietà commutativa** della moltiplicazione, ancora altri modi per scrivere la stessa cosa!).

Concludendo perciò: sei alle superiori e direi che se ti viene chiesto di calcolare "i 3/5 di 750" posso chiederti di fare: $\frac{3}{5}\cdot 750 = 3\cdot 150 = 450$ senza tanti altri *passaggi inutili*!

D'ora innanzi considererò **ERRORE** il procedimento che IGNORA il calcolo tra **frazioni** e *regredisce* a quello fra numeri **naturali** [cioè: (750:5)·3].

Problemi, con frazioni, di tipo "BASE"

Nei problemi con frazioni di tipo BASE, ci sono tre ingredienti: l'**intero**, la **frazione**, la **parte** dell'intero corrispondente alla frazione.

Il problema deve fornirti dei **valori** numerici per <u>due degli elementi indicati</u> e ti chiederà di <u>trovare il terzo elemento</u>.

Se indichiamo con la lettera ***D*** (DATO) il valore numerico assegnato dal problema e con la lettera ***x*** (la lettera che indica l'*incognita*, generalmente) il valore da trovare, possiamo rappresentare in una tabella le **tipologie** di problema BASE che puoi incontrare:

	l'**intero**	la **frazione**	la **parte**
1)	***D***	***D***	***x***
2)	***D***	***x***	***D***
3)	***x***	***D***	***D***

<u>**Esempio di problema di tipologia 1: "**dati l'**intero** e la **frazione**, trova la **parte"**</u>

EX n. 224 pag 121 "Paolo deve acquistare uno scooter che costa € 2760, ma possiede soli i 2/3 della somma. Quanto **manca** a Paolo per acquistare lo scooter?"

Prima di partire *in quarta* a scrivere i dati o, peggio, a fare conti, bisogna capire BENE cosa chiede il problema.

Il problema fornisce l'**intero** e chiede di trovare la **parte** di quest'intero corrispondente a una certa **frazione**. MA la parte corrispondente a quale frazione? ai 2/3 di tale intero? Il poblema chiede di trovare quanto MANCA a Paolo per arrivare a 2760 euro, sapendo che lui **ne** ha i 2/3. La frazione corrispondente a quello che dobbiamo cercare <u>non</u> è quindi 2/3 ma <u>quella che manca per arrivare all'intero</u> e cioè: 1/3!

DATI: **intero** = € 2760; **frazione** = 1/3; **parte** =?

La risoluzione del problema, a questo punto, è semplice: $\frac{1}{3} \cdot 2760 = 920$

Risposta: "A Paolo mancano 920 €, per acquistare lo scooter".

NOTA: <u>non</u> è un **errore** trovare i 2/3 di 2760 e poi *sottrarre* la cifra trovata a 2760, ma è una risoluzione <u>meno consapevole</u> e quindi "vale meno" di quella proposta da me.

Per esercitarsi. Altri problemi di **tipologia 1** sono: n. 229 pag. 121 e n. 230 pag. 122.

<u>**Esempio di problema di tipologia 2 "**dati l'**intero** e la **parte**, trova la **frazione"**</u>

Sul libro ci sono pochi esercizi di questo tipo che invece, specialmente nei problemi con **percentuali**, sono molto importanti.

Ne inventerò uno semplice io: "La classe **I K** è composta di 30 persone, 12 sono ragazze. Che frazione corrisponde al numero dei **ragazzi**?"

Come prima, bisogna fare attenzione per scrivere correttamente i dati:

DATI: **intero** = 30 studenti; **parte** = 18 ragazzi; **frazione**=?

Di nuovo, scritti i dati, la risoluzione è molto semplice: la **frazione** corrispondente al numero dei ragazzi, rispetto al totale degli studenti di quella classe, è la frazione <u>ridotta ai minimi termini</u> che si ottiene *rapportando* la **parte** con l'**intero**, e cioè: $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.

Risposta: i ragazzi costituiscono i 3/5 della classe **I K**.

<u>**Esempi di problema di tipologia 3 "**dati la **frazione** e la **parte**, trova l'**intero"**</u>

<u>I problemi di questo tipo sono i più difficili</u> e perciò farò più esempi, darò più possibilità di risoluzione e accetterò, per qualche tempo, anche quelle risoluzioni che <u>non</u> utilizzano, di fatto, le operazioni tra le **frazioni** ma le operazioni fra **naturali**.

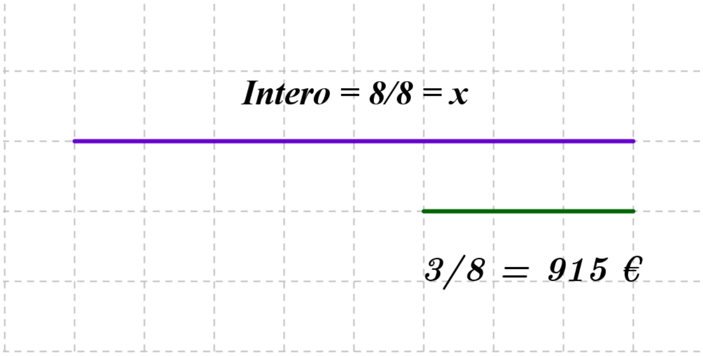
Il metodo più generale – perciò più astratto e quindi più difficile – è quello che si serve delle **equazioni**. Sappiate che le equazioni fanno parte del programma e prima vi deciderete ad affrontarle e prima capirete come *funzionano*!

EX n. 222 pag 121 "Ho portato in banca i 5/8 di una somma che ho guadagnato e ho tenuto la **restante parte**, cioè: € 915. Quale somma avevo guadagnato?"

Anche questa volta c'è da fare un ragionamento **prima** di scrivere i DATI: i 5/8 dell'**intero** li porto in banca. Che frazione dell'intero mi resta? $1 - \frac{5}{8} = \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

DATI: **intero** = ?; **parte** = 915 €; **frazione** = 3/8

Metodo di risoluzione grafico



Guardando il disegno (ogni quadretto corrisponde a 1/8), spero ti sia chiaro che: se 3/8 dell'intero corrispondono a 915€, 1/8 dell'intero corrisponderà a 915€:3=305€ (ricorda che: $\frac{3}{8}=3\cdot\frac{1}{8}$)

Per avere tutto l'***intero*** (cioè 8/8) allora basterà moltiplicare 305€ per 8. 305€·8=2440€.

Risposta: "La somma che ho guadagnato è di 2440 €".

Osservazione Se scrivi in fila le operazioni che hai fatto (lasciando perdere per un attimo l'unità di misura, e cioè gli euro), hai: (915 : 3)·8 = $\frac{915}{3}\cdot 8=915\cdot\frac{8}{3}$.

> Quest'ultimo risultato è **GENERALE** (perciò l'esprimerò con le lettere): se una certa parte ***p*** di un intero ***i*** corrisponde alla frazione: $\frac{a}{b}$, allora si ha SEMPRE: $i=p\cdot\frac{b}{a}$

Metodo di risoluzione mediante equazioni

Premessa: circa nell'800 d.C., a Baghdad, un matematico arabo inventò un metodo per risolvere i problemi, ***rivoluzionario***! Per i curiosi, ne parlo per esteso qui (ci trovi anche il racconto che ho fatto in classe sull'arrivo in Italia delle cifre indoarabiche): http://www.alessandraprofangelucci.it/attachments/category/48/00%20Introduzione%20storica%20alle%20equazioni_05_02_2013.pdf

Questo metodo consiste (oggi) nell'indicare con una lettera la ***cosa*** che cerco (generalmente la lettera ***x***, ma non è obbligatorio); scrivere quello che ***so*** su questa ***cosa***, utilizzandola come fosse un numero conosciuto; arrivare a scrivere un'**uguaglianza** in cui ci siano solo numeri e questa ***cosa***: un'**equazione**. Ma torniamo al nostro problema:

DATI: **intero** = ***x***; **parte** = 915 €; **frazione** = 3/8

Il problema dice che "i 3/8 della ***cosa*** che cerco" ***corrispondono*** a 915€. Ricordando quanto detto a proposito della parte tra virgolette, si ***traduce*** così: $\frac{3}{8}\cdot x=915$.

A questo punto entrano in gioco le **leggi di monotonia** (pag 27) [che, per le **equazioni**, prendono il nome di: "**principi di equivalenza**" (pagg. 393-396)]: se fai la stessa operazione sui due ***membri*** di un'uguaglianza, ottieni un'**uguaglianza equivalente**.

> In particolare m'interessa un'uguaglianza al cui **primo membro** stia la ***cosa*** da sola (così al secondo membro avrei quanto ***vale***, no?).

Per far questo devo "togliere di mezzo" il fattore 3/8 e cioè moltiplicarlo per il suo **inverso**. Ma se faccio quest'operazione al *primo membro*, devo farla anche al secondo:

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{8}\cdot x=915\cdot\frac{8}{3}\quad\Rightarrow\quad x=915\cdot\frac{8}{3}=305\cdot 8=2440$$

(**TI RITROVI**: $x=915\cdot\frac{8}{3}$!!!)

Altri esercizi risolti utilizzando equazioni

EX 225 p. 121 "Un numero aumentato dei suoi 2/7 dà come risultato 495. Qual è quel numero?"

DATI intero **= 495;** parte **=** ***x***; frazione (*della parte! e da aggiungerle per avere l'intero!!*) **= 2/7**

Come puoi capire dai dati, NON ti trovi davanti a un problema di quelli BASE.

Questo problema si può risolvere mediante metodo grafico. Io qui presenterò la risoluzione mediante **equazione** perché è la più difficile e perché m'interessa di più.

Per scrivere l'**equazione** *basta* tradurre il testo del problema in *matematichese*. Per aiutarvi riscriverò il testo del problema in modo che, spero, sia più semplice la traduzione.

Un numero aumentato dei 2/7 **di quel numero dà come risultato** 495

$$x \quad + \quad (2/7) \cdot \quad x \quad = \quad 495$$

Cioè: $x + (2/7) \cdot x = 495$. E' leggermente più complessa di quella dell'altro esercizio perché bisogna effettuare un **calcolo letterale**: quanto fa $x + (2/7) \cdot x$?

Utilizzando la **proprietà distributiva** (da destra verso sinistra: $a \cdot c + b \cdot c = (a+b) \cdot c$) e osservando che x la posso pensare come: $1 \cdot x$, si ha: $x + (2/7) \cdot x = (1+2/7) \cdot x = (9/7) \cdot x$.

[Oppure, più intuitivamente: "quanto fa se aggiungo a una ***torta*** i 2/7 di un'altra ***torta*** uguale?" Cioè ti propongo di chiamare la x con una parola più familiare, come ***torta***, per fare i calcoli con i termini in x]

L'equazione perciò diventa: $(9/7) \cdot x = 495$. Per *risolvere* l'equazione, devi "togliere di mezzo" il fattore 9/7 e moltiplicandolo per il suo inverso. E quest'operazione va fatta sia al *primo membro*, sia *secondo membro*:

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{9}{7} \cdot x = 495 \cdot \frac{7}{9} \quad \Rightarrow \quad x = 495 \cdot \frac{7}{9} = 55 \cdot 7 = 385$$

Per verificare di aver fatto bene, puoi fare la prova. Cioè verificare che 385 + (2/7) 385 = 495.

Ex 233 p. 122 "***Moltiplicando*** **una data frazione** per 4/3, ***aggiungendo*** al ***prodotto*** 1/6 e ***dividendo*** la ***somma ottenuta*** per 25/12, **si ottiene** 2/5. Qual è la frazione?"

Traduco direttamente (i colori dovrebbero aiutarti a seguire *cosa corrisponde a cosa*):

$$[\, [\, x \cdot (4/3) \,] + 1/6 \,] : 25/12 = 2/5$$

La ***parentesi*** attorno al ***prodotto*** non è obbligatoria: è solo utile, credo, per la *traduzione*.

Nell'**equazione**: $[x \cdot (4/3)+1/6] \cdot 12/25=2/5$ ci sono alcune *differenze* rispetto alle due precedenti che abbiamo visto: non c'è nessun **calcolo letterale** da fare, perché di termine in x ce n'è uno solo ma, al primo membro, ci sono il **fattore** 12/25 e l'**addendo** 1/6.

Nel risolvere le equazioni bisogna sempre ricordare che lo "scopo del gioco" è isolare la x al *primo membro*. Bisogna perciò lavorare a ***togliere*** (non dimenticando i **principi di equivalenza**). Cominciamo con il *togliere* il fattore 12/25 con il solito metodo: moltiplicando per il suo inverso entrambi i membri dell'uguaglianza:

$$[x \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{6}] \cdot \frac{\cancel{12}}{\cancel{25}} \cdot \frac{\cancel{25}}{\cancel{12}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{25}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3} \cdot x + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Come *liberarsi* ora di "$\frac{1}{6}$"?

Aggiungendo a entrambi i membri dell'uguaglianza l'**opposto** di $\frac{1}{6}$:

$$-\frac{1}{6} + \frac{4}{3} \cdot x + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3} \cdot x = \frac{4}{6} \Rightarrow \quad x = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{4} = 2$$

Fai la prova tu!