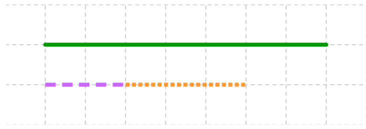
Somma (algebrica) di frazioni

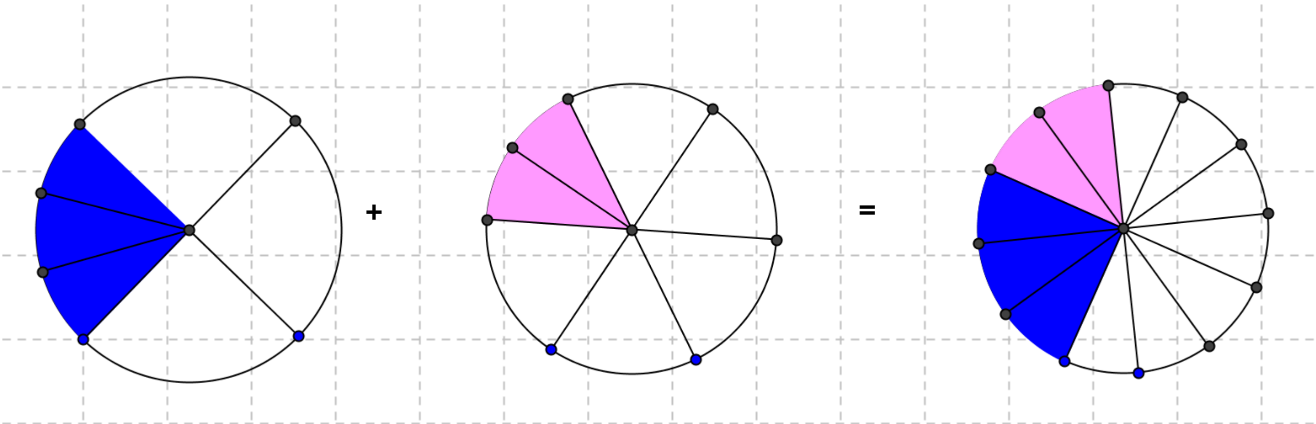
- **Addizionare frazioni** con **denominatori uguali** non crea problemi: denominatore uguale indica che abbiamo *porzioni dell'unità con le stesse dimensioni*, quindi la somma di tali porzioni sarà un *multiplo* della *porzione singola* e si otterrà sommando i numeratori:



  - **ES**: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$

- Dal disegno (un quadretto corrisponde a 1/7) si vede come, in questo caso, si possa effettuare l'addizione utilizzando anche un unico disegno: le porzioni che vado a sommare le posso prendere anche all'interno di un'unica "cosa".

- **Addizionare frazioni con denominatori differenti** crea qualche problema. Consideriamo un esempio: $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$



Se non hai commesso errori infatti, cioè se hai preso i due addendi da "cose" uguali (un segmento o una torta), ti troverai a <u>sommare porzioni, sottomultipli del segmento o fette di torta, di dimensioni differenti</u>.

- Come fare a trasformare le quantità da sommare in quantità con le *stesse dimensioni*? si tratterà di suddividere il tuo intero *"ripassando" sui tagli già presenti* e *dividendo le porzioni in sottoporzioni uguali*.

- E cioè devi trovare un nuovo denominatore che sia **multiplo** di entrambi i vecchi denominatori. E' comodo prendere il m.c.m (perché il più piccolo dei multipli *comuni*).

Per proseguire ti serve sapere cosa sono: una **frazione ridotta ai minimi termini**, **frazioni equivalenti** e il **fattore di molteplicità**

DEF Una frazione in cui numeratore e denominatore sono ***primi fra loro***, (cioè senza *divisori comuni*), si dice ***ridotta ai minimi termini***.

DEF Data una ***frazione ridotta ai minimi termini***, si dicono **frazioni equivalenti** a questa (cioè con stesso *valore* ma con *forma* differente) le frazioni che si ottengono moltiplicando numeratore e denominatore per uno stesso numero che chiamiamo: **fattore di molteplicità**. In simboli: $\frac{n}{n}\cdot\frac{a}{b}=\frac{n\cdot a}{n\cdot b}$ (n è il fattore di molteplicità) .

- Per sommare frazioni con denominatori differenti devi *trasformare le tue frazioni in frazioni equivalenti aventi per denominatore il m.c.m. fra i denominatori.*

Se vuoi passare da $\frac{1}{4}$, che è una frazione ridotta ai minimi termini, alla frazione equivalente con denominatore 12, devi trovare il numero che, moltiplicato per 4, dà 12 (e <u>moltiplicare per lo stesso numero</u> anche il numeratore).

Ti trovi in questa situaizone: $4 \cdot ? = 12$. Conosci un **fattore** di una moltiplicazione e il **prodotto** di quella moltiplicazione. Come fai a trovare l'altro fattore?

Ricordando che moltiplicazione e divisione sono una inversa dell'altra: $? = 12:4 = 3$.

Ora devi moltiplicare anche il numeratore per 3 e così hai: $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. Seguendo lo stesso procedimento anche per $\frac{1}{6}$, hai: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$.

Il ragionamento non cambia se, invece di un'addizione, fai un'**addizione algebrica**. Per convincertene meglio, aspetta di vedere come si *rappresentano le frazioni sulla retta.*

Prodotto di frazioni

Cerchiamo di capire perchè il **prodotto di due frazioni** è: una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori,.

Si può utilizzare la *rappresentazione di frazioni mediante segmenti* e il *prodotto di segmenti.*

In questo caso, diversamente dalla somma di frazioni, non è così importante che i due segmenti sui quali rappresentiamo le **frazioni fattori** siano uguali, perché non sono *le dimensioni delle parti* che sono importanti, ma *il numero delle parti stesse.*

Consideriamo per ES $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$

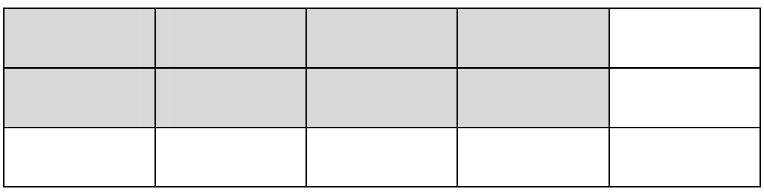
Il prodotto fra due numeri naturali lo abbiamo associato all'area di un rettangolo.

Detto ciò disegna un rettangolo (o un quadrato: come preferisci).

Dividi la base in 5 **parti uguali** e l'altezza in 3 **parti uguali**.

Colora i $\frac{4}{5}$ della base e i $\frac{2}{3}$ dell'altezza.

Se tracci le perpendicolari a base e altezza come mostrato nella figura seguente scoprirai che il tuo rettangolo risulta così diviso in $15=5 \cdot 3$ rettangolini uguali.



Evidentemente i denominatori di ciascuna frazione indicano in quante ***tacche*** uguali dividere ciascun lato e, facendo il prodotto, viene a costruirsi una griglia aventi tante caselle uguali quanto indicato dal prodotto fra le ***tacche*** che dividono i lati (in maniera analoga a quanto abbiamo già visto).

Se ora colori i rettangolini corrispondenti alle parti di segmenti indicate dai numeratori scoprirai che tali rettangolini sono in numero pari a $8=4 \cdot 2$.

Il motivo è analogo a quello richiamato ora per i denominatori.

Quoziente di frazioni

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ perché? Per capirlo è necessario che tu abbia chiara la definizione di **inverso di un numero**. Si ha infatti: $a:b=\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$ dove $\frac{1}{b}$ è l'inverso di b. Quindi, in genere, la divisione può essere vista come un caso particolare di **prodotto**: dividere un numero ***a*** per un numero ***b*** equivale a moltiplicare ***a*** per l'inverso di ***b***. E questo è quel che abbiamo fatto nella divisione tra frazioni che introduce l'argomento.