Le potenze e le loro proprietà

Una **potenza**, non è altro che una **moltiplicazione iterata** (ripetuta sempre uguale). E' un *modo sintetico* di scrivere una moltiplicazione con termini tutti uguali fra loro.

Per **esempio**, se dobbiamo moltiplicare il numero 2 per 2 per 2, in tutto 3 volte (per esempio per calcolare la *misura* del **VOLUME** di un ***cubo*** di ***spigolo*** 2), scriveremo: $\mathbf{2^3}$ (si legge: *due alla terza* oppure *due elevato alla terza*).

Quel **3** in alto a destra[1] si chiama **ESPONENTE**[2] e indica il numero di fattori uguali a **2** (la **BASE** della potenza) che compaiono nella moltiplicazione.

Per parlare in generale di una potenza, come di qualunque altro argomento matematico, non si utilizzano però *esempi numerici*, ma **lettere** (utilizzate con le stesse regole dei numeri[3]).

DEF Dati due numeri naturali, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{n}$, indicheremo con il simbolo: $\boxed{a^n}$ (si legge $\boldsymbol{a}$ *alla enne*, o $\boldsymbol{a}$ *elevato alla enne*. Raramente: $\boldsymbol{a}$ *alla ennesima*) il **prodotto** di $\boldsymbol{a}$ con sé stesso $\boldsymbol{n}$ volte[4]. In questa scrittura quindi $\boldsymbol{a}$ rappresenta la **BASE** e $\boldsymbol{n}$ l'**ESPONENTE**.

Qualche **osservazione** su *casi particolari*:

- ♥ Qualunque numero elevato a **1** dà come risultato sé stesso: $\boldsymbol{a}^1 = \boldsymbol{a}$.
- ♥ Qualunque numero, diverso da zero, elevato alla **0** dà come risultato **1**: $\boldsymbol{a}^0 = 1$ (*dimostreremo* questo fatto, poco intuitivo, dopo le proprietà delle potenze).
- ♥ **0** elevato a qualunque esponente, diverso da 0, dà **0**: $0^n = 0$.
- ♥ Una potenza con base **0** e esponente **0** non ha significato.

Proprietà delle potenze:

Premessa 1) Per capire bene cosa afferma ogni proprietà devi conoscere bene le parole che indicano risultati e termini delle operazioni. Se hai qualche incertezza vatti a studiare la tabella di pag. 2 del libro.

Premessa 2) In matematica, quando si parla di *risultati di operazioni* (e le proprietà delle potenze di questo parlano: di come ottenere il **risultato** di **moltiplicazioni**, o **divisioni**, in casi particolari) si segue SEMPRE uno stesso **schema**, che è bene tu conosca:

[1] Per scrivere un esponente in un file WORD devi selezionare il numero - o la lettera – che vuoi sia l'esponente e seguire il percorso: FORMATO → carattere → *apice*.

[2] **Esponente** è il participio presente del verbo esporre

[3] I **numeri** naturali sono simboli che **rappresentano** quantità precise; i numeri negativi sono simboli che *rappresentano* quantità al DI SOTTO di un certo livello di riferimento (lo zero, generalmente) e le lettere vengono utilizzate come simboli per *rappresentare*, invece di numeri specifici, numeri generici. In tutti quei casi in cui NON è importante il valore del numero ma il suo RUOLO. Il tipo di operazioni che ci si fanno.

[4] Potresti usare le lettere che vuoi, l'importante è che siano **differenti** se devi indicare una situazione generica e siano **uguali** quando devi indicare situazioni in cui i numeri rappresentati dalle lettere sono uguali. Ne avrai esempi nella parte dedicata alle proprietà delle potenze

a) Si dice che **tipo** di **oggetto matematico** è, il risultato di cui si parla (una **potenza**, una **radice**, una **frazione**, un **angolo**, un **segmento**, ecc). Si risponde, quindi, alla domanda: "**cos'è**?"

b) A seconda del **tipo** di oggetto matematico si <u>specificano le sue caratteristiche</u>. Si risponde, quindi, alla domanda: "**com'è fatta/o?**". Nel caso di una **potenza** si dovrà dire come sono fatte la ***base*** e l'***esponente***; nel caso di una **radice**: il *radicando* e l'*indice*; nel caso di una **frazione**: il *numeratore* e il *denominatore*; nel caso di un **angolo**: i *lati* e il *vertice*; nel caso di un **segmento**: gli *estremi*; ecc.

Prodotto di potenze di ugual base[5] - (sigla: PDPOTUBAS[6])

Se devi moltiplicare potenze che hanno la base uguale - grazie alla **definizione** di **potenza** e alla **proprietà associativa** della **moltiplicazione** - puoi utilizzare una *scorciatoia* per ottenere il risultato. L'esempio numerico che segue ti mostra il <u>**perché**</u>:

$$4^3 \cdot 4^2 = (4\cdot4\cdot4)\cdot(4\cdot4)\cdot= 4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4 = 4^{2+3} = 4^5$$

Spiegazione: nel <u>primo passaggio</u>, si utilizza la **definizione** di **potenza** per scomporre le potenze nella moltiplicazione che sottintendono, nel <u>secondo passaggio</u> si utilizza la **proprietà associtiva** della **moltiplicazione** e così si vede come i *fattori* siano *tanti quanti ne indica la somma degli esponenti delle potenze moltiplicate* (<u>terzo passaggio</u>) e nell'<u>ultimo passaggio</u> viene utilizzata la **definizione** di **potenza** per scrivere il prodotto in forma compatta.

In *sintesi*: se ci sono potenze con la stessa base **moltiplicate** (attenzione: se c'è un'**addizione algebrica** <u>tutto questo non vale</u>!), nel risultato: la base resta la stessa e gli esponenti si sommano perché se "smembri" le potenze (fattori) avrai la base che si ripete tante volte quante indicate dalla somma degli esponenti.

ENUNCIATO PDPOTUBAS (A *PAROLE*):

Il prodotto di potenze[7] di ugual base è:

(che cosa?) **una potenza**

(com'è fatta la sua base?) **con la <u>stessa base</u>**

(com'è fatto il suo esponente?) **che ha come <u>esponente</u> la <u>somma degli esponenti</u>**

ENUNCIATO PDPOTUBAS (IN *LETTERE*):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

N.B. (significa: NOTA BENE) Nel trattare le prossime proprietà non darò così tanti dettagli, come per il PDPOTUBAS, a meno che non me li chieda qualcuno esplicitamente!

---

[5] La matematica si interessa a cosa <u>non</u> varia. Non si parla <u>mai</u> esplicitamente di cosa <u>non</u> è regolare: si dà per sottinteso. E' quindi quasi un errore dire, nel parlare di questa proprietà, "**prodotto di potenze con la stessa base e gli esponenti diversi**". Sia perché, in realtà, gli esponenti potrebbero essere anche uguali e la proprietà vale lo stesso (dovrai scegliere quale usare fra PDPOTUBAS e PSPOTUEXP!) sia proprio perché quello che ho detto prima: non c'interessano le cose che sono DIVERSE!

[6] La **sigla** può esserti utile per indicare che proprietà stai utilizzando negli esercizi, senza scrivere troppo!

[7] **Attenzione**, l'ho corretto a tantissime e tantissimi, nella verifica: NON HA SENSO dire: "li prodotto di potenz**A** di ugual base" perché, per fare una moltiplicazione, servono almeno 2 fattori, e la parola **prodotto** significa: "<u>risultato di una moltiplicazione</u>".

Quoziente di potenze di ugual base - (sigla: QUOZPOTUBAS)

A PAROLE: **Il quoziente di potenze con ugual base[8] è una potenza con la stessa base che ha come esponente la differenza degli esponenti.**

IN LETTERE: $a^m : a^n = a^{m-n}$

Spiegazione: $$7^5 : 7^3 = \frac{7^5}{7^3} = \frac{\cancel{7}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{7}\cdot 7\cdot 7}{\cancel{7}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{7}} = 7^{5-3} = 7^2$$

Ricordando come una divisione *equivalga* a una **frazione** (e viceversa), utilizzando la **definizione** di **potenza** per scomporre le potenze al *numeratore* (sopra la linea di frazione) e al *denominatore* (sotto la linea di frazione) e osservando come ogni fattore al denominatore si *semplifica* con un fattore al numeratore, si ha che il risultato di una divisione (quoziente) fra potenze di ugual base ha un **numero** di *fattori* dato dalla *differenza* degli esponenti.

Potenza[9] di una potenza (sigla: POT-POT)

Si indica così - "potenza di potenza" - una potenza che ha, come base, un'altra potenza.

A PAROLE: **La potenza di una potenza è una potenza che ha la stessa base e come esponente il prodotto degli esponenti**

IN LETTERE: $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

Spiegazione: $(5^2)^4 = (5\cdot5)^4 = (5\cdot5)\cdot(5\cdot5)\cdot(5\cdot5)\cdot(5\cdot5) = 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5 = 5^8$.

Ricorda: la **moltiplicazione** (mi riferisco alla moltiplicazione fra gli esponenti, indicata negli enunciati) non è altro che un'**addizione iterata**. Il **numero** di *fattori* complessivi è dato dal **prodotto** fra gli esponenti. Guarda all'esempio sopra: l'esponente interno alla parentesi, il 2, indica che ci sono due fattori; l'esponente più esterno indica che questi due vanno ripetuti quattro volte. Quindi si hanno in tutto 2 fattori ripetuti 4 volte e cioè 8. Cioè: ci sono tanti fattori in tutto quanti indicati dal prodotto dei due esponenti.

Prodotto di potenze di ugual esponente - (sigla: PDPOTUEXP)

A PAROLE: **il prodotto di potenze con uguale esponente è una potenza che ha come base il prodotto delle basi e come esponente lo stesso esponente.**

IN LETTERE: $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$

Spiegazione: $4^3 \cdot 7^3 = (4\cdot4\cdot4)\cdot(7\cdot7\cdot7)\cdot = (4\cdot7)\cdot(4\cdot7)\cdot(4\cdot7) = (4\cdot7)^3 = 28^5$

Se si scompongono le potenze, si avranno le basi ripetute uno stesso numero di volte (perché l'esponente è uguale), si potranno perciò accoppiare (o mettere insieme, se sono più di due) e si avrà il prodotto delle basi ripetuto tante volte quante ne indica l'esponente.

---

[8] La specificazione contenuta nel libro riguardo alla *relazione* fra ***m*** ed ***n***, e cioè: $m \geq n$, non è necessaria. La proprietà infatti, come vedrai fra poche settimane, vale anche nel caso in cui: $m < n$. Certo, per ora non sai dargli un significato a questo secondo caso!

[9] Osserva: è l'unica proprietà in cui c'è il singolare: potenz**A** di una potenz**A**.

Quoziente di potenze di ugual esponente - (sigla: QUOZPOTUEXP)

A PAROLE: **il quoziente di potenze con uguale esponente è una potenza che ha per base il quoziente delle basi e come esponente lo stesso esponente**.

IN LETTERE: $a^n : b^n = (a : b)^n$

Spiegazione: $$7^3 : 5^3 = \frac{7^3}{5^3} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} = \left(\frac{7}{5}\right)^3 = (7:5)^3$$

Ricordando come una divisione *equivalga* a una **frazione**, utilizzando la **definizione** di **potenza** per scomporre le potenze al *numeratore* e al *denominatore*, si osserva come si ha lo stesso numero di fattori al numeratore e al denominatore.

Ricordando poi come funziona la moltiplicazione di frazioni (il **prodotto** di frazioni è una frazione che ha come *numeratore* il **prodotto** dei numeratori e come *denominatore* il **prodotto** dei denominatori: $\frac{n}{m} \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{m \cdot b}$), e che ogni uguaglianza si può leggere da sinistra verso destra o da destra verso sinistra: $\frac{n \cdot a}{m \cdot b} = \frac{n}{m} \cdot \frac{a}{b}$, si ha la proprietà cercata.

Ovviamente gli aspetti riguardanti le **frazioni** che sono presenti in questo file verranno ripresi e approfonditi ora che ci dedicheremo ai numeri razionali.

Andranno anche approfondite le **proprietà** dell'**uguaglianza**. Ricordatemelo!

Dimostrazione del fatto che che, se $a \neq 0, \quad allora: \quad a^0 = 1$

Questa dimostrazione si basa sui seguenti fatti che dovresti conoscere:

1) Ogni numero diviso per sé stesso dà 1
2) La proprietà di "quoziente di potenze di ugual base"
3) Una stessa operazione di tipo elementare (una di quelle studiate sinora), eseguita tra gli stessi termini, ma con modalità differenti, non può dare risultati differenti.
4) Esistono oggetti matematici che hanno **forma differente** ma uno stesso **valore**. Ad esempio esistono figure piane con forme differenti ma con la stessa area.

Utilizzando il punto (1): $\frac{a^n}{a^n} = 1$

Utilizzando il punto (2): $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$

Utilizzando il punto (3): $a^0 = 1$.

Cioè (punto 4) il simbolo a^0, cui non sappiamo dare un significato intuitivo, in base al ragionamento fatto deve valere 1